绝密★启用前

2023届高三10月统一调研测试

数学理科

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

$0\le x\le 4$　　$x-2>0$

C 1．已知集合 $A=\{x|\sqrt{x}\le 2\}$，$B=\{x|y=\lg(x-2)\}$，则 $A\cap B=$

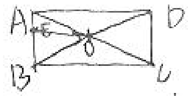
A．$[0,2)$　　B．$(0,2)$　　$x>2$　　C．$(2,4]$　　D．$[2,4]$

D 2．命题"$\forall a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=x^3+a\sin x$ 为奇函数"的否定为

A．$\forall a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=x^3+a\sin x$ 为偶函数　　B．$\exists a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=x^3+a\sin x$ 为偶函数

C．$\forall a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=x^3+a\sin x$ 不是奇函数　　D．$\exists a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=x^3+a\sin x$ 不是奇函数

D 3．已知在矩形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，线段 AC，BD 交于点 O，则 $\overrightarrow{EO}=$



A．$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$　　B．$\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$　　C．$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$　　D．$\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AO}$
$=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

A 4．"$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$"是"$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$"的

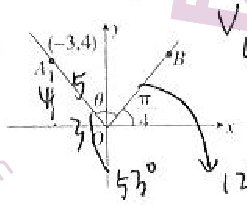
A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

D 5．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(-3,4)$，$\angle BOx=\frac{\pi}{4}$，记 $\angle AOB=\theta$，则 $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=$

$\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=-\frac{3}{5}$

$\sin(\theta-\frac{\pi}{4})=\frac{3}{5}$



$\cos[\frac{\pi}{2}+(\theta-\frac{\pi}{4})]=-\sin(\theta-\frac{\pi}{4})$
$=-\frac{3}{5}$

A．$-\frac{3}{5}$　　B．$\frac{3}{5}$　　C．$-\frac{4}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

6．中国的5G技术领先世界，5G技术极大地提高了数据传输速率，最大数据传输速率 C 取决于信道带宽 W，经科学研究表明，C 与 W 满足 $C=W\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$，其中 S 是信道内信号的平均功率，N 是信道内部的高斯噪声功率，$\frac{S}{N}$ 为信噪比．当信噪比较大时，上式中真数中的1可以忽略不计．若不改变带宽 W，而将信噪比

$C_1=W\log_2(1+500)$
$C_2=W\log_2(1+2000)$
$\frac{C_2}{C_1}=\frac{\log_2 2001}{\log_2 501}$

B $\frac{S}{N}$从 500 提升至 2000，则 C 增大的百分比约为(附：lg 2≈0.3010)

A. 19.2%　　B. 22.3%　　C. 26.4%　　D. 32.3%

A 7. 设向量 a 与 b 的夹角为 θ，定义 $a\oplus b=|a\sin\theta-b\cos\theta|$，已知 $|a|=\sqrt{2}$，$|b|=|a-b|=1$，则 $a\oplus b=$

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\sqrt{3}$

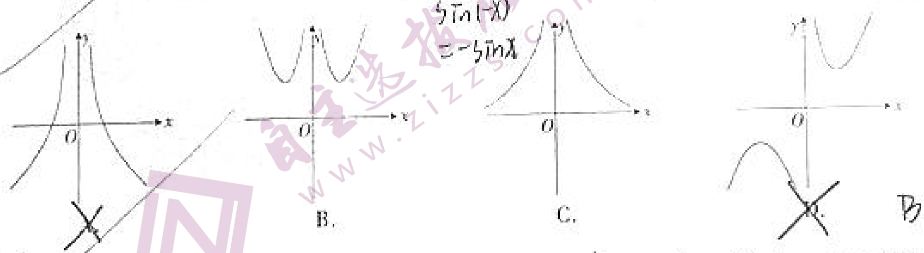
B 8. 已知函数 $f(x)=2|\sin x|+\cos 2x$，则下列结论中错误的是

A. $f(x)$的最大值为$\frac{3}{2}$　　B. $f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增

C. $f(x)$的图象关于直线 $x=\pi$ 对称　　D. $f(x)$的最小正周期为 π

B 9. 函数 $f(x)=\frac{x+x^3}{x-\sin x}$ 的大致图象为

$f(-x)=\frac{-x-x^3}{-x+\sin x}$　　$-f(-x)=\frac{x+x^3}{-x+\sin x}$　　$\sin(-x)=-\sin x$



B.　　C.

$BC=\frac{3\sqrt{7}}{7}$

C 10. 已知△ABC 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$a+\frac{b}{2}=c\sin\left(B+\frac{\pi}{2}\right)$，角 C 的平分线 CM 交 AB 于点 M，若 $AM=2BM=2$，则 $CM=$　　$C=\frac{2}{3}\pi$

A. $\frac{2\sqrt{21}}{21}$　　B. $\frac{4\sqrt{21}}{21}$　　C. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$　　D. $\frac{4\sqrt{7}}{7}$

$\left(f(x)-\frac{x}{e}\right)\left(ef(x)-e\right)=0$

D 11. 已知 $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\leqslant 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$，则方程 $e(f(x))^2-(x+e)f(x)+x=0$ 的解的个数为　　$f(x)=\frac{x}{e}$ 或 $f(x)=\frac{1}{e}$

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5　　2个解

C 12. 已知函数 $f(x)$，$g(x)$的定义域均为 $\mathbf{R}$，且满足 $f(x)-g(2-x)=4$，$g(x)+f(x-4)=6$，$g(3-x)+g(1+x)=0$，则 $\sum_{n=1}^{40}f(n)=$

A. -3180　　B. -1590　　C. 795　　D. 1590

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 计算：$\int_{-1}^{1}(x+1)\sqrt{1-x^2}\,dx=$ $\frac{\pi}{2}$

$\exists f'(x)=1$

14. 已知函数 $f(x)=x^3-ax^2$ 同时满足下列两个条件：①在$[1,+\infty)$上单调递增；②曲线 $y=f(x)$ 在$(1,+\infty)$上存在斜率为 1 的切线，则实数 a 可以为 $\frac{3}{2}$.（写出符合要求的一个值即可）

15. 已知定义在区间$[a,b]$$(b-a\geqslant 4046)$上的奇函数 $f(x)$满足 $f(2-x)=f(x)$，且当 $x\in[0,1]$时，$f(x)=2^{x+a+b}-c$，则 $f(2023)=$ -1.　　$T=2$　　$2^{a+b}=c$

16. 已知△ABC 的内角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c，△ABC 的外心为 O，$2\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=a^2(1-\cos B)-ab\cos A$，$b=2$，则$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$的最大值为 4.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,\ |\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x)$ 的图象上两个相邻对称中心间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，且 $\frac{7\pi}{12}$ 是函数 $f(x)$ 的一个零点.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 求函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调递减区间.

18.（本小题满分 12 分）

已知△ABC 中内角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，$\frac{2a-b+c}{\cos B+\cos C}=-\frac{b}{\cos B}$.

(1) 求 B；

(2) 从下面 3 个条件中任选 1 个，求 b 的最小值.

①△ABC 的面积 $S=\sqrt{3}(b+1)$；②△ABC 的周长 $l=4+2\sqrt{3}$；③$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\leqslant -1$.

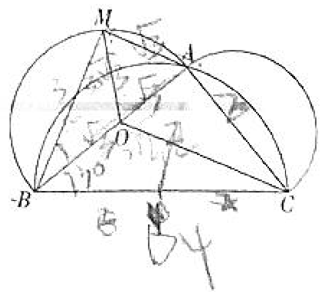
注：如选择多个条件分别解答，则按第一个解答计分.

19.（本小题满分 12 分）

如图是来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形. 此图由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC，直角边 AB，AC. 在△ABC 中，$BC=4$，$\angle ABC=30°$，O 为边 AB 的中点，M 为以 AB 为直径的半圆弧上任意一点.

(1) 若 $\sin\angle MBC=\frac{3}{5}$，求 $\cos\angle MOA$ 的值；

(2) 若 $MA\parallel OC$，求四边形 $ACOM$ 的面积.



$\cos\angle MOA = \cancel{2\sin}\cos 2\angle MBO$

$= \cancel{2\sin}$

$\cos 2[\angle MBC - \overset{30°}{\cancel{\angle MBO}}]$

$1 - 2\sin^2(\angle MBC - \overset{30°}{\cancel{\angle MBO}})$

$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 3$

20.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=e^x+2x^2\ln x-x^2$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程；

(2) 求证：$f(x)\geq ex-1$.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)+f'(2\pi)x=\frac{x^2}{\pi}-\cos x$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的最值.

$f(x)=\frac{x^2}{2}$

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1-e^{-ax}}{a}-\frac{x^2}{2}\ (a\in\mathbf{R})$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有两个极值点，求 a 的取值范围；

(2) 若不等式 $1-x-\ln x\geq a\left(f(x)+x+\frac{x^2}{2}\right)$ 恒成立，求 a 的取值范围.

$-\left(\frac{\ln x}{x}\right)$　$\frac{-\ln x}{x}$

$ax\quad \ln x$

$x=e^{-ax}$

$\ln x=-ax$

2023 届高三 10 月统一调研测试

数学理科参考答案及评分细则

1.【答案】C

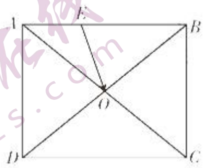
【解析】∵ $A=\{x|\sqrt{x}\leqslant 2\}=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{x|y=\lg(x-2)\}=\{x|x>2\}$，则 $A\cap B=(2,4]$，故选 C.

2.【答案】D

【解析】命题“$\forall a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=x^3+a\sin x$ 为奇函数”的否定为“$\exists a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=x^3+a\sin x$ 不是奇函数”，故选 D.

3.【答案】D

【解析】作出图形如下所示，则 $\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，故选 D.



4.【答案】A

【解析】因为 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin^2\alpha+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，取 $\alpha=-\frac{\pi}{2}$，$\beta=0$，满足 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$，但 $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}$，因此“$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$”是“$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$”的充分不必要条件，故选 A.

5.【答案】D

【解析】由图可知，$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$，$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left[\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$，故选 D.

6.【答案】B

【解析】当 $\frac{S}{N}=500$ 时，$C_1=W\log_2 501\approx W\log_2 500$；当 $\frac{S}{N}=2000$ 时，$C_2=W\log_2 2001\approx W\log_2 2000$. 所以 C 增大的百分比约为 $\frac{C_2-C_1}{C_1}=\frac{C_2}{C_1}-1\approx\frac{W\log_2 2000}{W\log_2 500}-1=\frac{\lg 2000}{\lg 500}-1=\frac{\lg 1000+\lg 2}{\lg 1000-\lg 2}-1=\frac{3+\lg 2}{3-\lg 2}-1\approx 0.223=22.3\%$，故选 B.

7.【答案】A

【解析】因为 $|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，所以 $\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$，从而 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^2=1$，所以 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\boldsymbol{a}\oplus\boldsymbol{b}=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{a}-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{b}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故选 A.

8.【答案】B

【解析】因为 $f(x)=2|\sin x|+\cos 2x=2|\sin x|+1-2\sin^2 x=-2\left(|\sin x|-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\leqslant\frac{3}{2}$，故 A 正确；又因为 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|+\cos\frac{\pi}{2}=\sqrt{2}$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\left|\sin\frac{\pi}{3}\right|+\cos\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}-\frac{1}{2}$，所以 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)>f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，故 B 错误；$f(2\pi-x)=2|\sin(2\pi-x)|+\cos[2(2\pi-x)]=2|\sin x|+\cos 2x=f(x)$，故 C 正确；因为 $g(x)=|\sin x|$，$h(x)=\cos 2x$ 的最小正周期均为 π，所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π，故 D 正确，故选 B.

9.【答案】B

【解析】$\because f(-x)=\frac{-x-x^3}{-x+\sin x}=\frac{x+x^3}{x-\sin x}=f(x)$，$\therefore f(x)$为偶函数，排除D；又当$x>0$时，$x-\sin x>0$，从而$f(x)>0$，排除A；当$x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$，排除C，故选B.

10.【答案】C

【解析】依题意，$a+\frac{b}{2}=c\sin\left(B+\frac{\pi}{2}\right)$，故$\sin A+\frac{\sin B}{2}=\sin C\cos B$，即$\sin B\cos C+\sin C\cos B+\frac{\sin B}{2}=\sin C\cos B$，解得$\cos C=-\frac{1}{2}$，$C=120°$，因为$CM$为角平分线，故$\frac{AC}{BC}=\frac{AM}{BM}=2$，设$BC=x$，$AC=2x$，故在$\triangle ABC$中，由余弦定理得$\cos\angle ACB=\frac{BC^2+AC^2-AB^2}{2BC\cdot AC}=\frac{5x^2-9}{4x^2}=-\frac{1}{2}$，解得$x=\frac{3\sqrt{7}}{7}$，而$S_{\triangle ACB}=S_{\triangle ACM}+S_{\triangle BCM}$，即$\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{7}}{7}\times\frac{6\sqrt{7}}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{6\sqrt{7}}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot CM+\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{7}}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot CM$，解得$CM=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，故选C.

11.【答案】C

【解析】方程$e(f(x))^2-(x+e)f(x)+x=0$等价于$(ef(x)-x)(f(x)-1)=0$，即$f(x)=\frac{x}{e}$或$f(x)=1$，当$x>1$时，$f(x)=\frac{x}{e}$或$f(x)=1$等价于$\ln x=\frac{x}{e}$或$\ln x=1$，令$g(x)=\ln x-\frac{x}{e}$，$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=\frac{e-x}{ex}$，当$x\in(1,e)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；当$x\in(e,+\infty)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，所以$g(x)$的最大值为$g(e)=0$，所以方程$\ln x=\frac{x}{e}$只有唯一解$x=e$；又方程$\ln x=1$的解也为$x=e$，从而$x>1$时，方程$e(f(x))^2-(x+e)f(x)+x=0$只有一个解. 当$x\leqslant1$时，$f(x)=\frac{x}{e}$或$f(x)=1$等价于$1-x^2=\frac{x}{e}$或$1-x^2=1$，易知方程$1-x^2=\frac{x}{e}$有两个解. 又方程$1-x^2=1$解得$x=0$，故当$x\leqslant1$时，方程$e(f(x))^2-(x+e)f(x)+x=0$有三个解. 综上，方程$e(f(x))^2-(x+e)f(x)+x=0$的解的个数为4个，故选C.

12.【答案】B

【解析】解法1：因为$g(3-x)+g(1+x)=0$，所以$g(x)$的图象关于点$(2,0)$对称，所以$g(2-x)=-g(x+2)$，因为$g(x)+f(x-4)=6$，所以$g(x+2)+f(x-2)=6$，即$g(x+2)=6-f(x-2)$，因为$f(x)-g(2-x)=4$，所以$f(x)+g(x+2)=4$，代入得$f(x)+[6-f(x-2)]=4$，即$f(x)-f(x-2)=-2$. 因为定义域为$\mathbf{R}$的函数$g(x)$的图象关于点$(2,0)$对称，所以$g(2)=0$，由$f(x)-g(2-x)=4$，得$f(0)-g(2)=4$，即$f(0)=4$，$f(2)=-2+f(0)=2$. 因为$g(x)+f(x-4)=6$，所以$g(x+4)+f(x)=6$，又因为$f(x)-g(2-x)=4$，相减得$g(x+4)+g(2-x)=2$，所以$g(x)$的图象关于点$(3,1)$中心对称，因为函数$g(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，所以$g(3)=1$，所以$f(1)=4-g(3)=3$. 记$a_n=f(2n-1)$，$b_n=f(2n)$，$n\in\mathbf{N}^*$，则数列$\{a_n\}$是以3为首项，-2为公差的等差数列，数列$\{b_n\}$是以2为首项，-2为公差的等差数列，故$a_n=3+(n-1)(-2)=-2n+5$，$b_n=2+(n-1)(-2)=-2n+4$，所以$\sum_{n=1}^{60}f(n)=\sum_{n=1}^{30}a_n+\sum_{n=1}^{30}b_n=\frac{30\times(3-55)}{2}+\frac{30\times(2-56)}{2}=-1590$. 故选B.

解法2：因为$g(3-x)+g(1+x)=0$，所以$g(x)$的图象关于点$(2,0)$对称，因为$g(x)+f(x-4)=6$，所以$g(x+4)+f(x)=6$，又因为$f(x)-g(2-x)=4$，相减得$g(x+4)+g(2-x)=2$，所以$g(x)$的图象关于点$(3,1)$中心对称，取$g(x)=\sin\pi x+x-2$即满足条件，所以$f(x)=4+g(2-x)=4+\sin[\pi(2-x)]+2-x-2=4-\sin\pi x-x$，$\because\sum_{n=1}^{60}\sin n\pi=0$，所以$\sum_{n=1}^{60}f(n)=\sum_{n=1}^{60}(4-n)=-1590$. 故选B.

13.【答案】$\frac{\pi}{2}$

【解析】由$\int_{-1}^{1}(x+1)\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$，又$f(x)=x\sqrt{1-x^2}$为奇函数，则$\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,dx$

$=0$，$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$，则$\int_{-1}^{1}(x+1)\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$.

14.【答案】$\frac{3}{2}$（答案不唯一，只要$1<a\leqslant\frac{3}{2}$即可）

【解析】若$f(x)$满足在$[1,+\infty)$上单调递增，则$f'(x)=3x^2-2ax\geqslant0$对$x\in[1,+\infty)$恒成立，解得$a\leqslant\left(\frac{3}{2}x\right)_{\min}$，即$a\leqslant\frac{3}{2}$，且$f'(x)=3x^2-2ax=1$在$(1,+\infty)$上有解，即$a=\frac{3x}{2}-\frac{1}{2x}$在$(1,+\infty)$上有解，得$a=\frac{3x}{2}-\frac{1}{2x}>1$. 所以$1<a\leqslant\frac{3}{2}$.

15.【答案】-1

【解析】因为$f(x)$在区间$[a,b]$上是奇函数，所以$a+b=0$，又$b-a\geqslant4046$，所以$b\geqslant2023$，易知$f(0)=0$，则$f(0)=2^{0+a+b}-c=1-c=0$，解得$c=1$，所以$f(x)=2^x-1$，$0\leqslant x\leqslant1$，因为$f(2-x)=f(x)$，$f(x)=f(2-x)=-f(x-2)=f(x-4)$，所以$f(x)$的一个周期为4. 因此$f(2023)=f(-1)=-f(1)=-(2-1)=-1$.

16.【答案】2

【解析】设BC的中点为M，则$OM\perp BC$，$\therefore\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(b^2-c^2)$，$\because 2\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=a^2(1-\cos B)-ab\cos A$，从而$b^2-c^2=a^2(1-\cos B)-ab\cos A=a(a-a\cos B-b\cos A)=a(a-c)$，$b^2=a^2+c^2-ac$，所以$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，得$B=\frac{\pi}{3}$，又$b=2$，所以$4=a^2+c^2-ac\geqslant ac$，因此$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=ca\cos B=\frac{1}{2}ac\leqslant2$，从而$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$的最大值为2.

17. 解：(1)$\because$函数$f(x)$的图象上两个相邻对称中心间的距离为$\frac{\pi}{2}$，

$\therefore T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，$\therefore\omega=2$.（1分）

$\therefore f(x)=2\sin(2x+\varphi)$.

$\because\frac{7\pi}{12}$是函数$f(x)$的一个零点，$\therefore f\left(\frac{7}{12}\pi\right)=2\sin\left(\frac{7}{6}\pi+\varphi\right)=0$，

$\therefore\frac{7\pi}{6}+\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，从而$\varphi=k\pi-\frac{7\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$.（3分）

$\because|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore k=1$，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$，$\therefore f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.（5分）

(2)由$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，（7分）

得$\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，（8分）

又$\because x\in[0,\pi]$，令$k=0$，得$\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}$，（9分）

$\therefore$函数$f(x)$在$[0,\pi]$上的单调递减区间为$\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$.（10分）

【评分细则】

第(2)问单调递减区间写成$\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$不扣分.

18. 解：(1)由$\frac{2a-b+c}{\cos B+\cos C}=-\frac{b}{\cos B}$及正弦定理得$2\sin A\cos B+\sin C\cos B=-\sin B\cos C$，（2分）

即 $2\sin A\cos B=-\sin(B+C)=-\sin A$，(4 分)

因为 $0<A<\pi$，$\sin A\neq 0$，

所以 $\cos B=-\frac{1}{2}$，$B=\frac{2\pi}{3}$.(6 分)

(2)若选①：

由 $S=\sqrt{3}(b+1)$ 得 $\frac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}(b+1)$，即 $ac=4(b+1)$，(8 分)

由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2+ac\geqslant 3ac=12(b+1)$，

所以 $b^2-12b-12\geqslant 0$，(10 分)

解得 $b\geqslant 6+4\sqrt{3}$，当且仅当 $a=c=4+2\sqrt{3}$ 时取等号.

所以 b 的最小值为 $6+4\sqrt{3}$.(12 分)

若选②：

由 $l=a+b+c=4+2\sqrt{3}$，得 $a+c=4+2\sqrt{3}-b$，(8 分)

由 $\cos B=-\frac{1}{2}$ 及余弦定理得 $b^2=a^2+c^2+ac=(a+c)^2-ac\geqslant(a+c)^2-\frac{1}{4}(a+c)^2=\frac{3}{4}(a+c)^2$，

所以 $b\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(a+c)=\frac{\sqrt{3}}{2}(4+2\sqrt{3}-b)$，(10 分)

所以 $b\geqslant 2\sqrt{3}$，当且仅当 $a=c=2$ 时取等号，

所以 b 的最小值为 $2\sqrt{3}$.(12 分)

若选③：

由 $\vec{BA}\cdot\vec{BC}=c\cdot a\cdot\cos B=-\frac{1}{2}ac\leqslant -1$，故 $ac\geqslant 2$，(9 分)

由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2+ac\geqslant 3ac\geqslant 6$，当且仅当 $a=c=\sqrt{2}$ 时取等号，(11 分)

所以 b 的最小值为 $\sqrt{6}$.(12 分)

【评分细则】

第(2)问没有说明取等条件扣 1 分.

19. 解：(1)记 $\angle MBA=\alpha$，则 $\angle MOA=2\alpha$，$\angle MBC=\alpha+30°$，

由 $\sin(\alpha+30°)=\frac{3}{5}$，又 $30°\leqslant\angle MBC<120°$，则 $\cos(\alpha+30°)=\frac{4}{5}$，(2 分)

则 $\cos[2(\alpha+30°)]=2\cos^2(\alpha+30°)-1=2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{7}{25}$，(3 分)

$\sin[2(\alpha+30°)]=2\sin(\alpha+30°)\cos(\alpha+30°)=2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$，(4 分)

所以 $\cos\angle MOA=\cos 2\alpha=\cos[2(\alpha+30°)-60°]$

$=\cos[2(\alpha+30°)]\cos 60°+\sin[2(\alpha+30°)]\sin 60°=\frac{7}{25}\times\frac{1}{2}+\frac{24}{25}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7+24\sqrt{3}}{50}$，(6 分)

(2)因为 $BC=4$，$\angle ABC=30°$，所以 $OB=\sqrt{3}$，

故 $OC=\sqrt{OB^2+BC^2-2OB\cdot BC\cos\angle ABC}=\sqrt{3+16-2\times\sqrt{3}\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{7}$，(7 分)

记 $\angle COA=\theta$，因为 $MA\parallel OC$，$OM=OA$，

所以 $\angle OAM=\angle OMA=\theta$，$\angle MOA=\pi-2\theta$，

在 $\triangle AOC$ 中，由 $OC=\sqrt{7}$，$OA=\sqrt{3}$，$\angle OAC=90°$，

得 $\cos\theta=\frac{OA}{OC}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.(8 分)

则 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{7}}{7}$, $\sin\angle MOA=\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{2\sqrt{7}}{7}\times\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.(10 分)

故 $S_{四边形ACOM}=S_{\triangle ACO}+S_{\triangle AOM}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times2+\frac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{13\sqrt{3}}{7}$.(12 分)

20.(1)解:$f(1)=e-1$,所以切点为$(1,e-1)$.(2 分)

又 $f'(x)=e^x+4x\ln x$,所以切线斜率为 $f'(1)=e$.(4 分)

从而切线方程为 $y-(e-1)=e(x-1)$,进一步化简得 $ex-y-1=0$.(6 分)

(2)证明:设 $g(x)=f(x)-ex+1=e^x+2x^2\ln x-x^2-ex+1$,

$g'(x)=e^x+4x\ln x-e=e^x-e+4x\ln x$,易知 $g'(1)=0$.(8 分)

当 $x\in(0,1)$时,$e^x-e<0$,且 $\ln x<0$,所以 $g'(x)<0$,$g(x)$在$(0,1)$上单调递减;(9 分)

当 $x\in(1,+\infty)$时,$e^x-e>0$,且 $\ln x>0$,所以 $g'(x)>0$,$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增.(10 分)

所以 $g(x)\geq g(1)=e-1-e+1=0$,故 $f(x)\geq ex-1$.(12 分)

【评分细则】

第(1)问切线方程没有化成一般式不扣分.

21.解:(1)由 $f(x)+f'(2\pi)x=\frac{x^2}{\pi}-\cos x$,得 $f(x)=\frac{x^2}{\pi}-\cos x-f'(2\pi)x$,

两边求导得 $f'(x)=\frac{2}{\pi}x+\sin x-f'(2\pi)$.(2 分)

令 $x=2\pi$ 得,$f'(2\pi)=4-f'(2\pi)$,解得 $f'(2\pi)=2$.(4 分)

从而 $f(x)=\frac{x^2}{\pi}-\cos x-2x$.(5 分)

(2)求导得 $f'(x)=\frac{2}{\pi}x+\sin x-2$,易得 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'(\pi)=0$.(6 分)

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$\frac{2}{\pi}x<1$,$\sin x<1$,从而 $f'(x)=\frac{2}{\pi}x+\sin x-2<0$,

所以 $f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减.(7 分)

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时,令 $g(x)=\frac{2}{\pi}x+\sin x-2$,$g'(x)=\frac{2}{\pi}+\cos x$,

易知存在 $x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$使得 $g'(x_0)=0$,

且 $x\in\left(\frac{\pi}{2},x_0\right)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增,当 $x\in(x_0,\pi)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减.(9 分)

又 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$,$g(\pi)=0$,所以当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时,$g(x)>0$,即 $f'(x)>0$,

从而 $f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$上单调递增.(10 分)

所以 $f(x)$的最小值为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{3\pi}{4}$.(11 分)

又 $f(0)=-1$,$f(\pi)=-\pi+1$,所以 $f(\pi)<f(0)$,从而 $f(x)$的最大值为 $f(0)=-1$.(12 分)

【评分细则】

第(2)问如果直接用数形结合,画出 $y=\sin x$ 和 $y=2-\frac{2}{\pi}x$ 的图象来判断 $f'(x)$的零点和正负,从而得出 $f(x)$的单调性并求出最值,酌情给分.

22. 解：(1) $f'(x)=e^{-ax}-x$，因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有两个极值点，

所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有两个零点，即方程 $e^{-ax}-x=0$ 有两个正根，

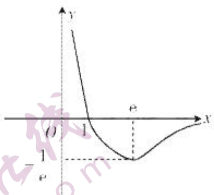
进一步转化为 $\ln x+ax=0$ 即 $a=-\dfrac{\ln x}{x}$ 有两个根，(2 分)

令 $g(x)=-\dfrac{\ln x}{x}$，$g'(x)=\dfrac{\ln x-1}{x^2}$，

当 $x\in(0,e)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递减，

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(e)=-\dfrac{1}{e}$，画出函数 $g(x)$ 的图象如图所示，(4 分)



由方程 $a=-\dfrac{\ln x}{x}$ 有两个根，得 $-\dfrac{1}{e}<a<0$. (5 分)

(2) 不等式 $1-x-\ln x>a\left(f(x)+x+\dfrac{x^2}{2}\right)$ 恒成立可转化为 $e^{-ax}-ax-x-\ln x>0$ 恒成立.

进一步转化为 $e^{-ax}-ax>x+\ln x$ 恒成立. 即 $e^{-ax}+\ln(e^{-ax})>x+\ln x$. (7 分)

令 $h(x)=x+\ln x$，易知 $h(x)=x+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以由 $h(e^{-ax})>h(x)$ 恒成立，得 $e^{-ax}>x$ 恒成立，

进一步得 $-ax>\ln x$，分离参数得 $-a>\dfrac{\ln x}{x}$，(9 分)

令 $\varphi(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$\varphi'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

当 $x\in(0,e)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $\varphi(x)_{\max}=\varphi(e)=\dfrac{1}{e}$，(11 分)

从而 $-a>\dfrac{1}{e}$，解得 $a<-\dfrac{1}{e}$，

因此 a 的取值范围为 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{e}\right)$. (12 分)

【评分细则】

第(1)问直接研究 $y=\ln x+ax$ 的图象与 x 轴有两个交点，求出 a 的取值范围，不扣分.

数学理科 第 6 页(共 6 页)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。