2021 届普通高中教育教学质量监测考试

全国卷(新高考)　数学　参考答案

1. C 【解析】由已知可得 $A=\{x|-x^2-x+2\geqslant 0\}=\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x|2^{2x}>2^{-1}\}=\{x|2x>-1\}=\{x|x>-\frac{1}{2}\}$，所以 $A\cap B=\{x|-\frac{1}{2}<x\leqslant 1\}$.

2. D 【解析】由已知可得 $z=\frac{2+i}{i^{2021}}=\frac{2+i}{i}=\frac{(2+i)\cdot(-i)}{-i^2}=1-2i$，所以 $\bar{z}=1+2i$.

3. B 【解析】设点 P 的初始坐标为 (x,y)，由题意可得 $\begin{cases}x+(-2)\times 4=-5\\ y+3\times 4=16\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=3\\ y=4\end{cases}$，即点 P 的初始坐标为 $(3,4)$.

4. C 【解析】设第 n 级台阶的海拔高度为 $a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，$a_{191}=a_1+0.15\times 190=186$，解得 $a_1=157.5$，所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 157.5、公差为 0.15 的等差数列．设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则第 51 级台阶到第 100 级台阶的海拔高度之和为 $S_{100}-S_{50}=100\times 157.5+\frac{100\times 99}{2}\times 0.15-50\times 157.5-\frac{50\times 49}{2}\times 0.15=8433.75\approx 8433.8$ 米.

5. A 【解析】因为 $f(-x)=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\cdot 2^{\sin|-x|}=\frac{e^x-1}{e^x+1}\cdot 2^{\sin|x|}=-\frac{1-e^x}{1+e^x}\cdot 2^{\sin|x|}=-f(x)$，故 $f(x)$ 是奇函数，排除选项 C，D；又 $f(1)=\frac{1-e}{1+e}\cdot 2^{\sin 1}<0$，排除 B.

6. B 【解析】由 $\cos\alpha+\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})=0$，可得 $\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2})=0$，即 $(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2})(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})=0$．因为 $\alpha\in(\pi,2\pi)$，所以 $\frac{\alpha}{2}\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，所以 $\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$，解得 $\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\frac{\alpha}{2}\in(\frac{3\pi}{4},\pi)$，所以 $1+\sin\alpha=\frac{1}{2}$，所以 $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$．又 $\alpha\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$，所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=0$．另解：由 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，$\alpha\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$，故 $\alpha=\frac{11\pi}{6}$，所以 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=\sin 2\pi=0$.

7. A 【解析】由勾股定理可得 $BC=2\sqrt{3}$．如图 1，当点 D 在 AC 上运动时，设 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AC}(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，则 $\overrightarrow{CD}=(\lambda-1)\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}$．又因为 $\angle C=90^\circ$，所以 $AD\perp BC$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}=\lambda(\lambda-1)\overrightarrow{AC}^2=4(\lambda-\frac{1}{2})^2-1$，当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}$ 取得最小值 -1．如图 2，当点 D 在 BC 上运动时，设 $\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BC}(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，则 $\overrightarrow{CD}=(\lambda-1)\overrightarrow{BC}$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BD}$．又因为 $\angle C=90^\circ$，所以 $AC\perp BD$，所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BD}=\lambda(\lambda-1)\overrightarrow{BC}^2=12(\lambda-\frac{1}{2})^2-3$，当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}$ 取得最小值 -3．综上，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}$ 的最小值是 -3.

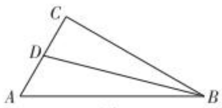


图1

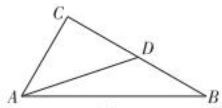


图2

8. D 【解析】设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，由“均值数列”的定义可得 $\frac{S_n}{n}=n$，所以 $S_n=n^2$．当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1$；当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$．$a_1=1$ 也满足 $a_n=2n-1$，所以 $a_n=2n-1$．所以 $\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}$

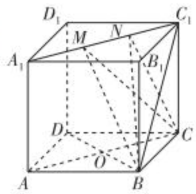
$=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$，所以 $T_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})<\frac{1}{2}$. 又 $T_n<\frac{1}{2}m^2-m-1$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，所以 $\frac{1}{2}m^2-m-1\geqslant\frac{1}{2}$，整理得 $m^2-2m-3\geqslant0$，解得 $m\leqslant-1$ 或 $m\geqslant3$.

9. AC 【解析】设 $3^{-a}=5^{-b}=m(m>0)$，所以 $a=\log_3\frac{1}{m}$，$b=\log_5\frac{1}{m}$. 当 $0<m<1$ 时，$a>b>0$；当 $m=1$ 时，$a=b=0$；当 $m>1$ 时，$a<b<0$.

10. BC 【解析】由图象可知，$A=2$，$T=2[\frac{\pi}{3}-(-\frac{\pi}{6})]=\pi$，故 $f(x)$ 的最小正周期为 π，故 A 错误；所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，得 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$. 又因为当 $x=\frac{\frac{\pi}{3}+(-\frac{\pi}{6})}{2}=\frac{\pi}{12}$ 时，$f(x)=2$，即 $f(\frac{\pi}{12})=2\sin(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi)=2$，即 $\sin(\frac{\pi}{6}+\varphi)=1$. 又因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，可得 $\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$. 由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，可得 $-\frac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，令 $k=0$，可得 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}]$ 上单调递增，故 B 正确；又 $f(\frac{5\pi}{6})=2\sin(\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{3})=0$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{5\pi}{6},0)$ 对称，故 C 正确；$y=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $y=2\sin[2(x+\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{6}]=2\sin(2x+\frac{\pi}{2})=2\cos2x$，故 D 错误.

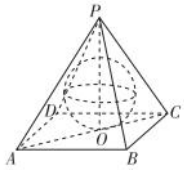
11. CD 【解析】由已知得 $\frac{3a+3b}{(2a+b)(a+2b)}=1$，整理得 $3(a+b)=2a^2+5ab+2b^2$，从而有 $ab=3(a+b)-2(a+b)^2$，$0<ab\leqslant(\frac{a+b}{2})^2$，所以 $0<3(a+b)-2(a+b)^2\leqslant\frac{(a+b)^2}{4}$，解得 $\frac{4}{3}\leqslant a+b<\frac{3}{2}$，当且仅当 $a=b=\frac{2}{3}$ 时取等号，所以 $a+b$ 的值可能为 $\frac{4}{3}$，$\frac{17}{12}$.

12. BCD 【解析】因为 C,M,N 同在平面 AA_1C_1C 上，而 B 不在平面 AA_1C_1C 上，所以 BM,CN 不在同一个平面内，故 A 错误；因为 $MN\parallel AC$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，$MN\not\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $MN\parallel$ 平面 $ABCD$，故 B 正确；因为 $A_1A\perp$ 平面 $ABCD$，而 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $A_1A\perp BD$，连接 AC,BD 交于点 O，则 $AC\perp BD$，而 $A_1A\cap AC=A$，$A_1A\subset$ 平面 A_1ACC_1，$AC\subset$ 平面 A_1ACC_1，所以 $BD\perp$ 平面 A_1ACC_1. 因为 $CM\subset$ 平面 A_1ACC_1，所以 $BD\perp CM$，故 C 正确；不妨设正方体的棱长为 a，$MN=b$，则 $S_{\triangle CMN}=\frac{1}{2}\times MN\times CC_1=\frac{1}{2}ab$. 由于 $BD\perp$ 平面 A_1ACC_1，则 $BO\perp$ 平面 A_1ACC_1，$BO=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，所以 $V_{三棱锥B-CMN}=\frac{1}{3}S_{\triangle CMN}\cdot BO=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}ab\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^2b$. 因为 a,b 为定值，所以三棱锥 $B-CMN$ 的体积为定值，故 D 正确.



13. $\exists x\in\mathbf{R},\ln|x+1|-e^2\leqslant0$ 【解析】因为全称量词命题的否定是存在量词命题，所以只需将原命题中的全称量词改为存在量词，并对结论进行否定. 即 $\neg p:\exists x\in\mathbf{R},\ln|x+1|-e^2\leqslant0$.

14. $\frac{9}{4}$ 【解析】由已知得 $f'(x)=e^x+\frac{a}{x+1}$，所以 $f(0)=-1$，$f'(0)=1+a$，所以切线方程为 $y=(1+a)x-1$. 由 $g(x)=\frac{1}{3}x^3+x+a-1$ 得 $g'(x)=x^2+1$，令 $g'(x)=x^2+1=1+a$，解得 $x=\pm\sqrt{a}$. 代入切线 $y=(1+a)x-1$，求得切点为 $(\sqrt{a},(1+a)\sqrt{a}-1)$，$(-\sqrt{a},-(1+a)\sqrt{a}-1)$. 将切点坐标代入曲线 $g(x)=\frac{1}{3}x^3+x+a-1$，求得 $a=\frac{9}{4}$.



15. $\frac{6\sqrt{6}-10\sqrt{2}}{3}\pi$ 【解析】如图，设方锥底面的中心为 O，则在 $Rt\triangle ABC$ 中，$AC=2\sqrt{2}$，所以 $AO=CO=\sqrt{2}$，在$Rt\triangle PAO$中，$PO=\sqrt{2}$，所以方锥的体积为$\frac{4\sqrt{2}}{3}$，设方锥内切球的半径为 r，而方锥的表面积为 $4+4\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=4+4\sqrt{3}$，由等体积可得$\frac{4\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{3}\times(4+4\sqrt{3})r$，解得 $r=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，体积为$\frac{4}{3}\pi\times(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2})^3=\frac{6\sqrt{6}-10\sqrt{2}}{3}\pi$.

16. 6 【解析】由 $A+B+C=\pi$，得 $\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}=4\sin^2\frac{A}{2}$. 因为 $\sin\frac{A}{2}\neq0$，所以 $\cos\frac{A}{2}=4\sin\frac{A}{2}$，即 $\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{4}$，解得 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{\sqrt{17}}$，$\cos\frac{A}{2}=\frac{4}{\sqrt{17}}$，所以 $\sin A=2\times\frac{1}{\sqrt{17}}\times\frac{4}{\sqrt{17}}=\frac{8}{17}$，$\cos A=(\frac{4}{\sqrt{17}})^2-(\frac{1}{\sqrt{17}})^2=\frac{15}{17}$，故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{4}{17}bc=4$，所以 $bc=17$. 由余弦定理及 $b+c=10$，可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=10^2-2\times17-2\times17\times\frac{15}{17}=36$，解得 $a=6$.

17.【解析】若选①，因为 $a_1=2$，

所以 $a_2=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$，$a_3=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=-\frac{1}{2}$，$a_4=\frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{2}+1}=-3$，

$a_5=\frac{-3-1}{-3+1}=2$，$a_6=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$，…，……………… 6分

所以数列$\{a_n\}$的周期为 4，……………… 8分

所以 $a_{2020}=a_{504\times4+4}=a_4=-3$. ……………… 10分

若选②，因为 $S_n-2a_n+2=0$，

所以由已知，当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}-2a_{n-1}+2=0$. ……………… 4分

两式相减，可得$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2$. ……………… 6分

又因为 $a_1=2$，所以数列$\{a_n\}$是首项为 2，公比为 2 的等比数列，

所以 $a_n=2\times2^{n-1}=2^n$，所以 $a_{2020}=2^{2020}$. ……………… 10分

若选③，因为 $a_{n-1}-a_n=2a_na_{n-1}$，所以$\frac{a_{n-1}-a_n}{a_na_{n-1}}=2$，即$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=2$.

又$\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2}$，所以数列$\{\frac{1}{a_n}\}$是以$\frac{1}{2}$为首项，2 为公差的等差数列. ……………… 6分

所以$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}+2(n-1)=\frac{4n-3}{2}$，

所以 $a_n=\frac{2}{4n-3}$，所以 $a_{2020}=\frac{2}{4\times2020-3}=\frac{2}{8077}$. ……………… 10分

18.【解析】(1)因为 D，E 分别为 A_1C_1，B_1C_1 的中点，所以 $DE/\!/A_1B_1$. ……………… 2分

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB/\!/A_1B_1$，所以 $AB/\!/DE$. ……………… 4分

又因为 $DE\subset$平面 CDE，$AB\not\subset$平面 CDE，所以 $AB/\!/$平面 CDE. ……………… 6分

(2)因为 $A_1B_1=A_1C_1$，E 为 B_1C_1 的中点，所以 $A_1E\perp B_1C_1$. ……………… 7分

因为 $C_1C/\!/AA_1$，所以 $C_1C\perp$平面 $A_1B_1C_1$.

又因为 $A_1E\subset$平面 $A_1B_1C_1$，所以 $C_1C\perp A_1E$. ……………… 9分

因为 $C_1C\subset$平面 BB_1C_1C，$B_1C_1\subset$平面 BB_1C_1C，$C_1C\cap B_1C_1=C_1$，所以 $A_1E\perp$平面 BB_1C_1C. ……… 11分

因为 $C_1E\subset$平面 BB_1C_1C，所以 $A_1E\perp CE$. ……………… 12分

19.【解析】(1)因为函数 $f(x)=\log_2\frac{x-1}{1-ax}(a\in\mathbf{R})$ 是奇函数，

所以 $f(x)+f(-x)=0$，即 $\log_2\frac{x-1}{1-ax}+\log_2\frac{-x-1}{1+ax}=0$. …… 1分

所以 $\log_2(\frac{x-1}{1-ax}\times\frac{-x-1}{1+ax})=0$，所以 $\frac{x-1}{1-ax}\times\frac{-x-1}{1+ax}=1$ 恒成立.

所以 $(a^2-1)x^2=0$ 恒成立. 所以 $a^2-1=0$，解得 $a=\pm1$. …… 3分

又当 $a=1$ 时，$f(x)=\log_2\frac{x-1}{1-x}$ 无意义，所以 $a=-1$.

所以 $f(x)=\log_2\frac{x-1}{1+x}$. …… 5分

(2)法一：任取 $2\leqslant x_1<x_2\leqslant3$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\log_2\frac{x_1-1}{1+x_1}-\log_2\frac{x_2-1}{1+x_2}=\log_2\frac{(x_1-1)(1+x_2)}{(x_2-1)(1+x_1)}=\log_2[\frac{x_1x_2+(x_1-x_2)-1}{x_1x_2+(x_2-x_1)-1}]$.

因为 $2\leqslant x_1<x_2\leqslant3$，所以 $0<\frac{x_1x_2+(x_1-x_2)-1}{x_1x_2+(x_2-x_1)-1}<1$，

所以 $\log_2[\frac{x_1x_2+(x_1-x_2)-1}{x_1x_2+(x_2-x_1)-1}]<0$，即 $f(x_1)-f(x_2)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上单调递增. …… 7分

又因为 $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+m)$ 在 $[2,3]$ 上单调递减， …… 8分

所以函数 $f(x)$ 的图象与函数 $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+m)$ 的图象在区间 $[2,3]$ 上有交点，

只需要 $\begin{cases}f(2)\leqslant g(2)\\f(3)\geqslant g(3)\end{cases}$，即 $\begin{cases}\log_2\frac{2-1}{1+2}\leqslant\log_{\frac{1}{2}}(2+m)\\\log_2\frac{3-1}{1+3}\geqslant\log_{\frac{1}{2}}(3+m)\end{cases}$， …… 10分

解得 $-1\leqslant m\leqslant1$.

所以实数 m 的取值范围是 $[-1,1]$. …… 12分

法二：

由题等价于：$\frac{x-1}{1+x}=\frac{1}{x+m}$ 在 $[2,3]$ 上有解， …… 6分

变形为：$m=\frac{x+1}{x-1}-x=\frac{2}{x-1}-x+1$， …… 7分

令 $h(x)=\frac{2}{x-1}-x+1(2\leqslant x\leqslant3)$，则 $h'(x)=-\frac{2}{(x-1)^2}-1<0$ 恒成立，

所以 $h(x)$ 在 $[2,3]$ 上单调递减， …… 9分

$h(2)=1$，$h(3)=-1$， …… 11分

所以 m 的取值范围为 $[-1,1]$. …… 12分

20.【解析】(1)由题意知 $1-\sin^2A-(1-\sin^2B)=\sin^2C+\sin A\sin C$，

即 $\sin^2A+\sin^2C-\sin^2B=-\sin A\sin C$.

由正弦定理，可得 $a^2+c^2-b^2=-ac$. …… 2分

则由余弦定理，可得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{-ac}{2ac}=-\frac{1}{2}$. …… 4分

又因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{2\pi}{3}$. …… 5分

(2)由正弦定理，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{3}{\sin\frac{2\pi}{3}}=2\sqrt{3}$，

所以 $a=2\sqrt{3}\sin A$，$c=2\sqrt{3}\sin C$. …… 7分

则$\triangle ABC$的周长$L=a+b+c=2\sqrt{3}(\sin A+\sin C)+3$

$=2\sqrt{3}[\sin A+\sin(\frac{\pi}{3}-A)]+3=2\sqrt{3}\sin(A+\frac{\pi}{3})+3$. ………………………………………… 9 分

因为$0<A<\frac{\pi}{3}$，所以$\frac{\pi}{3}<A+\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}$，所以$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin(A+\frac{\pi}{3})\leqslant 1$， ………………………… 11 分

所以$6<2\sin(A+\frac{\pi}{3})+3\leqslant 3+2\sqrt{3}$，

所以$\triangle ABC$周长的取值范围是$(6,3+2\sqrt{3}]$. ……………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)证明：因为E，F分别为PC和CD的中点，

所以$EF/\!/PD$，$EF\not\subset$平面PAD，$PD\subset$平面PAD，故$EF/\!/$平面PAD， ………………………… 2 分

因为$CD=2AB$，所以$AB=DF$.

又$AB/\!/CD$，$AD\perp CD$，所以四边形$ADFB$是矩形，

所以$BF/\!/AD$，$BF\not\subset$平面PAD，$AD\subset$平面PAD，故$BF/\!/$平面PAD. ………………………… 4 分

因为$EF\subset$平面BEF，$BF\subset$平面BEF，$EF\cap BF=F$，

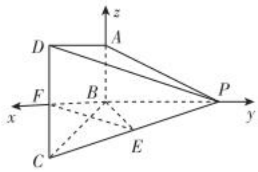
所以平面$BEF/\!/$平面PAD. ……………………………………………………………… 5 分

(2)因为$PB\perp$平面$ABCD$，$AB\subset$平面$ABCD$，$BF\subset$平面$ABCD$，

所以$PB\perp AB$，$PB\perp BF$.

由(1)知$AB\perp BF$，即AB，PB，BF两两垂直.

建立如图所示的空间直角坐标系$B-xyz$. ………………………… 6 分



设$CD=2AB=2$，则$PB=CD=2AD=2$，

所以$A(0,0,1)$，$P(0,2,0)$，$D(1,0,1)$，$C(1,0,-1)$，

所以$\overrightarrow{PA}=(0,-2,1)$，$\overrightarrow{PD}=(1,-2,1)$，$\overrightarrow{PC}=(1,-2,-1)$. ………………………… 8 分

设平面APD的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

所以$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PA}=0\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-2y+z=0\\x-2y+z=0\end{cases}$.

令$z=2$，得$x=0$，$y=1$，所以$\boldsymbol{m}=(0,1,2)$. ……………………………………… 9 分

设平面CPD的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x-2y-z=0\\x-2y+z=0\end{cases}$.

令$x=2$，得$y=1$，$z=0$，所以$\boldsymbol{n}=(2,1,0)$. ……………………………………… 10 分

所以$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{1}{5}$. ……………………………………… 11 分

故二面角$A-PD-C$的余弦值为$-\frac{1}{5}$. ……………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)当$a=-2$时，$f(x)=\ln x-(x-1)^2(x>0)$，

$f'(x)=\frac{1}{x}-2(x-1)=\frac{-2x^2+2x+1}{x}$. ……………………………………………… 1 分

令$f'(x)=0$，即$-2x^2+2x+1=0$，解得$x=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$(负值舍去).

当$0<x<\frac{\sqrt{3}+1}{2}$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当$x>\frac{\sqrt{3}+1}{2}$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减. ………………………………………… 3 分

综上，$f(x)$的单调递增区间为$(0,\frac{\sqrt{3}+1}{2})$，单调递减区间为$(\frac{\sqrt{3}+1}{2},+\infty)$. ………………………… 4 分

(2)由(1)得 $g(x)=f(x)-2x+1=\ln x+\frac{1}{2}a(x-1)^2-2x+1$,

$g'(x)=\frac{1}{x}+a(x-1)-2=\frac{ax^2-(a+2)x+1}{x}$. ………………………………………………………… 5 分

设 $h(x)=ax^2-(a+2)x+1$,

因为 $\Delta=(a+2)^2-4a=a^2+4>0$,且 $x_1+x_2=\frac{a+2}{a}>0$,$x_1\cdot x_2=\frac{1}{a}>0$,

所以 $h(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不等实根 $x_1,x_2(0<x_1<x_2)$, ………………………………… 7 分

且当 $x\in(0,x_1),(x_2,+\infty)$ 时,$h(x)>0,g'(x)>0$;

当 $x\in(x_1,x_2)$ 时,$h(x)<0,g'(x)<0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0,x_1),(x_2,+\infty)$ 上单调递增,在 (x_1,x_2) 上单调递减.

故 x_1,x_2 是 $g(x)$ 的两个极值点. ………………………………………………………………………… 9 分

由 $x_1+x_2=\frac{a+2}{a}=1+\frac{2}{a}$,$x_1x_2=\frac{1}{a}$.

得 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(1+\frac{2}{a})^2-\frac{2}{a}=\frac{4}{a^2}+\frac{2}{a}+1$. ………………………………………… 11 分

又因为 $a\geqslant1$,所以 $0<\frac{1}{a}\leqslant1$,

解得 $1<x_1^2+x_2^2\leqslant7$.

即 $x_1^2+x_2^2$ 的取值范围是 $(1,7]$. ……………………………………………………………………

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承"专业、专注、有态度"的创办理念，不断探索"K12 教育+互联网+大数据"的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供"衔接和桥梁纽带"作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网"年度口碑影响力在线教育品牌"。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。