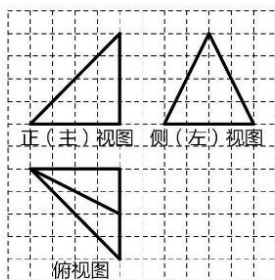


清华附中朝阳学校 2019-2020 学年度第一学期第 2 次质量检测试卷

高三数学

一、 选择题

1. 已知集合 $A = \{x | x(x+1) \leq 0\}$, 集合 $B = \{x | \lg x < 0\}$, 则 $A \cup B =$ ()
- A. $\{x | x < 1\}$ B. $\{x | -1 < x \leq 0\}$ C. $\{x | -1 \leq x < 1\}$ D. $\{x | 0 < x < 1\}$
2. 下列函数中, 在定义域内是减函数的是 ()
- A. $f(x) = \frac{1}{x}$ B. $f(x) = \frac{1}{2^x}$ C. $f(x) = \sqrt{x}$ D. $f(x) = \lg|x|$
3. 若 $0 < m < 1$, 则 ()
- A. $\log_m(1+m) > \log_m(1-m)$ B. $\log_m(1+m) > 0$
- C. $1-m > (1+m)^2$ D. $(1-m)^{\frac{1}{3}} > (1-m)^{\frac{1}{2}}$
4. 将函数 $y = \sin(2x + \varphi)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位后, 得到一个偶函数的图象, 则 φ 的一个可能取值为 ()
- A. $\frac{3\pi}{4}$ B. 0 C. $-\frac{\pi}{4}$ D. $-\frac{3\pi}{4}$
5. 在正方形网格中, 某四面体的三视图如图所示, 如果小正方形网格的边长为 1, 那么该四面体最长棱的棱长为 ()



- A. $2\sqrt{5}$ B. $4\sqrt{2}$ C. 6 D. $4\sqrt{3}$
6. 设 a, b 是非零向量, 则 “ $a = 2b$ ” (晓观数学) 是 “ $|a+b| \geq |a|+|b|$ ” 的 ()
- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
- C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 在 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点, $AM=1$, 点 P 在 AM 上且满足 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PM}$, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) = (\quad)$

- A. $-\frac{4}{9}$ B. $-\frac{4}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{4}{9}$

8. 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点 F 作一条与其渐近线垂直的直线, 垂足为 A , O 为坐标原点,

若 $|OA| = \frac{1}{2}|OF|$, 则此双曲线的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

9. 若函数 $f(x) = |x^2 - k| - x + 3$ 至多有一个零点, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 3]$ B. $[9, +\infty)$ C. $(0, 9]$ D. $(-\infty, 9]$

10. 在交通工程学中, 常作如下定义: 交通流量 Q (辆/小时): 单位时间内通过道路上某一横断面的车辆数; 车流速度 V (千米/小时): 单位时间内车流平均行驶过的距离; 车流密度 K (辆/千米): 单位长度道路上某一瞬间所存在的车辆数. 一般的, V 和 K 满足一个线性关系, 如 $V = v_0 \left(1 - \frac{K}{k_0} \right)$ (其中 v_0, k_0 是正数), 则以下说法正确的是 ()

A. 随着车流密度增大, 车流速度增大
B. 随着车流密度增大, 交通流量增大
C. 随着车流密度增大, 交通流量先减小, 后增大
D. 随着车流密度增大, 交通流量先增大, 后减小

下说法正确的是 ()

- A. 随着车流密度增大, 车流速度增大
B. 随着车流密度增大, 交通流量增大
C. 随着车流密度增大, 交通流量先减小, 后增大
D. 随着车流密度增大, 交通流量先增大, 后减小

二、 填空题

11. 已知平面向量 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-1, 3)$, 若向量 $\vec{a} \perp (\vec{a} + \lambda\vec{b})$, 则实数 λ 的值为_____.

12. 圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ 的圆心到直线 $3x + 4y + 14 = 0$ 的距离是_____.

13. 已知函数 $f(x) = \cos 2x$, 若 x_1, x_2 满足 $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$, 则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值是_____.

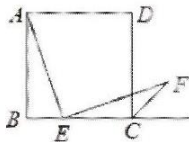
14. 若函数 $f(x)$ 满足下面 (晓观数学) 三个条件:

- (1) $f(x)$ 在定义域上图象不间断;
(2) $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增;
(3) $\forall x \in (0, 1)$, 都有 $f(x) > x$, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$.

则称函数 $f(x)$ 为 “UP 函数”, 请写出一个 UP 函数 $f(x) =$ _____.

15. 若函数 $f(x) = \frac{a - \sin x}{\cos x}$ 在区间 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是_____.

16. 如图, 已知边长为 4 的正方形 $ABCD$, E 是 BC 上一动点(与 B 、 C 不重合), 连接 AE , 作 $EF \perp AE$ 交 $\angle BCD$ 的外角平分线于 F . 设 $BE = x$. 记 $f(x) = \overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{CF}$, 则函数 $f(x)$ 的值域是_____. 当 $\triangle ECF$ 面积最大时, $|EF| =$ _____.



三、解答题

17. 已知函数 $f(x) = \cos x \sin(\frac{\pi}{2} + x) - \sqrt{3} \sin x \cos x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及单调增区是;

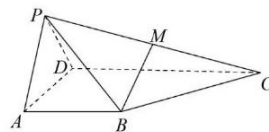
(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ 上的最小值.

18. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, (晓观数学) 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $\triangle PAD$ 为等边三角形, $AB = AD = \frac{1}{2}CD$. $AB \perp AD$, $AB \parallel CD$, 点 M 是 PC 的中点.

(1) 求证: $MB \parallel$ 平面 PAD .

(2) 求二面角 $P-BC-D$ 的余弦值.

(3) 在线段 PB 上是否存在点 N , 使得 $DN \perp$ 平面 PBC ? 若存在, 请求出 $\frac{PN}{PB}$ 的值; 若不存在, 请说明理由.



19. 已知函数 $f(x) = (x-1)e^x + ax^2$, $a \in R$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 内单调递增, 求实数 a 的取值范围.

(2) 求函数 $f(x)$ 的极值.

20. 设 l 为曲线 $C: y = (x-2)\ln x$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线. (晓观数学)

(1) 求 l 的方程;

(2) 证明: 曲线 C 与直线 l 只有一个公共点.

21. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $A(2, 1)$, 且长轴长为 $4\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆方程及离心率;

(2) 设 P 、 D 、 E 为椭圆 C 上三个不同的点, 且 D 、 E 关于 y 轴对称, 直线 PD 、 PE 分别与 y 轴交于两个不同的点 M 、 N , 比较 $|OP|^2$ 与 $|OM| \cdot |ON|$ 的大小, 并说明理由.

22. 数学 $1, 2, 3, \dots, n (n \geq 2)$ 的任意一个排列记作 (a_1, a_2, \dots, a_n) , 设 S_n 为所有这样的排列构成的集合.

集合 $A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in S_n \mid \text{任意整数 } i, j, 1 \leq i < j \leq n, \text{ 都有 } a_i - i \leq a_j - j\}$, 集合

$B_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in S_n \mid \text{任意整数 } i, j, 1 \leq i < j \leq n, \text{ 都有 } a_i + i \leq a_j + j\}$

(1) 用列举法表示集合 A_3 , B_3 ;

(2) 求集合 $A_n \cap B_n$ 的元素个数;

(3) 记集合 B_n 的元素个数为 b_n , 证明: 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列. (晓观数学)

自主招生在线创始于 2014 年, 是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台, 旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵, 关注用户超百万, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生, 引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注自主招生在线官方微信号: [zizzsw](https://www.zizzs.com)。



微信扫一扫，快速关注