

龙岩市2023年高中毕业班三月教学质量检测

数学试题

(满分:150分考试时间:120分钟)

注意事项:

- 1.考生将自己的姓名、准考证号及所有的答案均填写在答题卡上.
 - 2.答题要求见答题卡上的“填涂样例”和“注意事项”.
- 一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

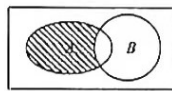
1.若复数 z 满足 $(1-2i)z=(2+i)^2$,则 $|z|$ =

- A.5 B. $\sqrt{5}$ C.3 D. $\sqrt{3}$

2.若全集 $U \in \mathbf{R}$,集合 $A = \{x|y = \sqrt{5-x}, x \in \mathbf{N}\}$, $B = \{y|y = -x^2+3\}$,

则图中阴影部分表示的集合为

- A. \emptyset B. $\{0, 1, 2\}$
C. $\{3, 4, 5\}$ D. $\{4, 5\}$



(第2题图)

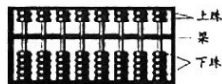
3.已知向量 $\vec{a} = (-3, 0)$, $\vec{b} = (2, 1)$, $\vec{c} = (\lambda, -1)$, $\lambda \in \mathbf{R}$,若 $(\vec{a}+2\vec{b}) \perp \vec{c}$,

则 \vec{c} 在 \vec{a} 上的投影向量为

- A. $(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$ B. $(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5})$ C. $(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5})$ D. $(\frac{6\sqrt{5}}{5}, -\frac{3\sqrt{5}}{5})$

4.算盘是我国一类重要的计算工具.下图形一把算盘的初始状态,自右向左前四位分别表示个位、十位、百位、千位,上面一粒珠子(简称上珠)代表5,下面一粒珠子(简称下珠)代表1,即五粒下珠的代表数值等于同组一粒上珠的代表数值,例如,个位拨动一粒上珠至梁上,十位来拨动,百位数动一粒下珠至梁上,表示数字105.现将算盘的千位拨动一粒珠子至梁上,个位、十位、百位至多拨动一粒珠子至梁上,其它位置珠子不数动.设事件 $A =$ “表示的四位数为偶数”,事件 $B =$ “表示的四位数大于5050”,则 $P(B|A) =$

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{5}{12}$
C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{6}$



(第4题图)

5.已知两数 $f(x) = 2|\sin x| + \cos x$,则 $f(x)$ 的最小值为

- A. $-\sqrt{5}$ B.-2
C.-1 D.0

6.已知函数 $f(x) = \sin x - x \cos x$,若 $a = f(\log_2 e)$, $b = f(\ln 3)$, $c = f(\sin e)$.则 a, b, c 的大小关系为

- A. $b > a > c$ B. $a > b > c$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

7.已知 M 是圆 $C: x^2 + y^2 = 2$ 上一个动点,且直线 $l_1: m(x-3) - n(y-2) = 0$ 与直线 $l_2: n(x-2) + m(y-3) = 0$ ($m, n \in \mathbf{R}, m^2 + n^2 \neq 0$)相交于点 P ,则 $|PM|$ 的最小值是

- A. $4\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}$

8. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 若点 M 在线段 BC_1 上运动, 当 $\triangle AMC$ 的周长最小时, 三棱锥 $M-CB_1D_1$ 的外接球表面积为

- A. 4π B. 8π C. 16π D. 32π

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

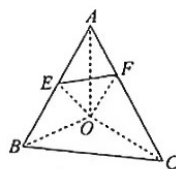
9. 下列说法正确的是

- A. 一组数 1, 5, 6, 7, 10, 13, 15, 16, 18, 20 的第 75 百分位数为 16
 B. 在经验回归方程 $y = -0.6x + 2$ 中, 当解释变量 x 每增加 1 个单位时, 相应变量 \hat{y} 增加 0.6 个单位
 C. 数据 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 的方差为 M , 则数据 $3a_1+1, 3a_2+1, 3a_3+1, \dots, 3a_n+1$ 的方差为 $9M$
 D. 一个梯木的方差 $S^2 = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} (x_i - 2)^2$, 则这组样本数据的总和等于 100

10. 如图, 已知 $AO \perp$ 平面 OBC , $\angle BOC = \frac{2\pi}{3}$, $OA = OB = OC = 1$, E 为 AB 的中点,

$\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AF}$, 则

- A. $EF \parallel OB$
 B. $OF = \frac{\sqrt{5}}{3}$
 C. $OE \perp$ 平面 ABC
 D. 直线 OE 与 OF 所成角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{20}$



(第 10 题图)

11. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 左、右顶点分别为 M, N , O 为坐标原点. 直线 l 交双曲线 C 的右支于 P, Q 两点 (不同于右顶点), 且与双曲线 C 的两条渐近线分别交于 A, B 两点, 则

- A. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 为定值
 B. $|PA| = |BQ|$
 C. 点 P 到两条渐近线的距离之和的最小值为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$
 D. 存在直线 l 使 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0$

12. 已知函数 $f_n(x) = x - n \ln x$ ($n \in \mathbb{N}$) 有两个零点, 分别记为 x_n, y_n ($x_2 < y_n$); 对于 $0 < \alpha < \beta$, 存在 θ 使 $f_n(\beta) - f_n(\alpha) = f_n'(\theta)(\beta - \alpha)$, 则

- A. $f_n(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增
 B. $n > e$ (其中 $e = 2.71828 \dots$ 是自然对数的底数)
 C. $x_{n+1} - x_n < y_{n+1} - y_n$
 D. $2\theta < \alpha + \beta$

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13.已知 $(a+x)(1+x)^6$ 的展开式中 x^2 的系数为 21, 则 $a = \underline{\quad}$.

14.写出一个同时满足下列三个性质的函数 $f(x) = \underline{\quad}$.

① $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ; ② $f(x)$ 是奇函数; ③ $f(x+1)$ 是偶函数.

15.欧拉是十八世纪数学界最杰出的人物之一,他不但在数学上作出巨大的贡献,而且把做学用到了几乎整个物理领域.函数 $\varphi(n)$ 以其首名研究者欧拉命名,称为欧拉函数.在数论中,对于正整数 n , $\varphi(n)$ 是不大于 n 的正整数中与 n 互质的数的个数,例如: $\varphi(9) = 6$, 则 $\log_3 \varphi(3^{2023}) = \underline{\quad}$.

16.已知抛物线 $C: y^2 = 4x$, 直线 l 过点 $G(0, \frac{4}{3})$ 且与 C 相交于 A, B 两点, 若 $\angle AOB$ 的平分线过点 $E(1, 1)$, 则直线 l 的斜率为 $\underline{\quad}$.

四、解答题:本题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或算步骤.

17. (本题满分10分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公差 $d \neq 0$, 前 n 项和为 S_n , 且 $\frac{S_n}{S_{2n}}$ 为常数.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) $\{b_n\} = \frac{n}{a_n a_{n+1}} - \frac{n+1}{a_{n+1} a_{n+2}}$, 证明: $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n < \frac{1}{3}$.

18. (本题满分12分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $b \tan A + c \tan B = \frac{c}{\sqrt{3} \cos A}$.

(1) 求角 B ;

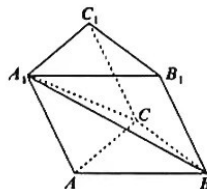
(2) 若 D 是 AC 边上的点, 且 $AD = 3DC = 3$, $\angle A = \angle ABD = \theta$, 求 $\sin \theta$ 的值.

19. (本题满分12分)

三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp AC$, $AB = AC = 2$, 侧面 A_1ACC_1 为矩形, $\angle A_1AB = \frac{2\pi}{3}$, 三棱锥 C_1-ABC 的体积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求侧棱 AA_1 的长;

(2) 侧棱 CC_1 上是否存在点 E , 使得直线 AE 与平面 A_1BC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$? 若存在, 求出线段 C_1E 的长; 若不存在, 请说明理由.



(第19题图)

20. (本题满分12分)

为了丰富同学们的校园生活,某校团委牵头,发起体育运动和文化项目比赛,经过角逐,甲、乙两人进入最后的决赛.决赛先进行两天,每天实行三局两胜制,即先赢两局的人获得该天胜利,此时该天比赛结束.若甲、乙两人中的一方能连续两天胜利,则其为最终冠军;若前两天甲、乙两人各赢一天,则第三天只进行一周附加赛,该附加赛的获胜方为最终冠军.设每局比赛甲获胜的概率为 $\frac{1}{3}$,每局比赛的结果没有平局且结果互相独立.

- (1) 记第一天需要进行的比赛局数为 X ,求 X 的分布列及 $E(X)$;
- (2) 记一共进行的比赛局数为 Y ,求 $P(Y \leq 5)$.

21. (本题满分12分)

已知椭圆 $K: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$,过右焦点 F_2 的直线 l 交椭圆 K 于 M, N 两点,以线段 $|MF_2|$ 为直径的圆 C 与圆 $C_1: x^2 + y^2 = 8$ 内切.

- (1) 求椭圆 K 的方程;
- (2) 过点 M 作 $ME \perp x$ 轴于点 E ,过点 N 作 $NQ \perp x$ 轴于点 Q , OM 与 NE 交于点 P ,是否存在直线 l 使得 $\triangle PMN$ 的面积等于 $\frac{\sqrt{6}}{2}$?若存在,求出直线 l 的方程;若不存在,请说明理由.

22. (本题满分12分)

已知函数 $f(x) = \ln x, g(x) = x - \frac{2}{x}$.

(1) 若 x_0 满足 $f(x) = \frac{x_0 - 1}{x_0 - 1}$,证明:曲线 $y = f(x)$ 在点 $A(x_0, \ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y = e^x$ 的切线;

(2) 若 $F(x) = f(x) - g(x)$,且 $F'(x_1) = F'(x_2) (x_1 \neq x_2)$,

证明: $F(x_1) + F(x_2) < 4 \ln 2 - 7$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线