大联考
2022—2023学年(上)高一年级期末考试
数学 ·答案

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.

1. 答案　A

命题意图　本题考查集合的表示与运算.

解析　由题意可得CgB={xlx<2或x≥3},则An(CgB)={xl- 1≤x<2}.

2. 答案　B

命题意图　本题考查含量词的命题的否定.

解析　命题“3x ∈(0,+o),sinx=1+x”的否定是“Vx ∈(0,+~),sinx≠1+x”.

3. 答案　C

命题意图　本题考查三角函数的图象变换.

解析　因为 $y=\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\sin 3\left(x+\frac{\pi}{18}\right)$,所以只需将y=sin 3x的图象上的所有点向左平移$\frac{\pi}{18}$个单位长度即可得到函数 $y=\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$的的图象.

4. 答案　B

命题意图　本题考查基本不等式的应用.

解析　因为α+b=4,所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{4}(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{4}\left(2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geqslant\frac{1}{4}\left(2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}\right)=1$,当且仅当a=2,b=2时，等号成立，故$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最小值为1.

5. 答案　A

命题意图　本题考查函数的单调区间.

解析由$x^2-2x-3>0$,得x<-1或x>3,设$u=x^2-2x-3$,则当x∈(- α,-1)时，u关于x单调递减，当x∈(3,+o)时，u关于x单调递增，又因为y=lnu单调递增，可知f(x)的单调递减区间为(-~,-1).

6. 答案　D

命题意图　本题考查同角三角函数的基本关系.全科免费下载公众号-《高中僧课堂》

解析　由题意得 $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha=-\frac{1}{3}$, 又$\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{3\pi}{2}$,所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$,所以tan α=$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, 故 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times\frac{1}{2\sqrt{2}}}{1-\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{7}$.

7. 答案　C

命题意图　本题考查函数图象.

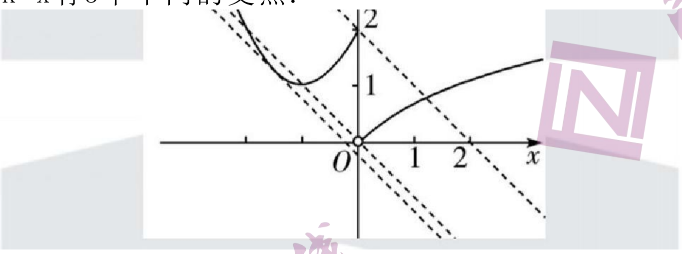
解析　当$a>1$时，$y=a$*为增函数，$g(x)=x^2-2ax$的图象的对称轴为直线$x=a>1$,A错误，C正确，当$0<a<$

1时，y=a*为减函数，$g(x)=x^2-2ax$的图象的对称轴为直线$0<x=a<1$,B错误，D错误.

8. 答案　D

命题意图　本题考查分段函数的图象，以及图象交点问题.

解析　如图，作函数f(x)的大致图象(实线),平移直线y=k-x,当$k=-\frac{1}{4}$时，直线$y=-\frac{1}{4}-x$与曲线$y=x^2+2x+2(x\leqslant 0)$相切；当k=0时，直线y=-x经过点(0,0),且与曲线$y=x^2+2x+2(x\leqslant 0)$有2个不同的交点；当k=2时，直线y=2-x经过点(0,2),且与f(x)的图象有3个不同的交点. 由图分析可知，当$k\in(0,2)$时，f(x)的图象与直线y=k-x有3个不同的交点.



二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 每小题全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 答案　ACD

命题意图　本题考查充分条件与必要条件的判断.

解析　对于A,因为偶数是整数中的一部分，故“x为偶数”是“x为整数”的充分条件，正确；

对于B,若b<a<0,推不出$a^2>b^2$,故“$a^2>b2$”不是“a>b”的必要条件，错误；

对于C,若m>n>0,因为y=ln0.2<0,所以mln0.2<nln0.2,即ln0.2"<ln0.2",故“m>n>0”是“ln0.2"<ln 0.2"”的充分条件，正确；

对于D,$a^3-b^3=e^6-e$“等价于$a^3+e^4=b^3+e6$,易知函数f(x)=x^3+e*在R上单调递增，故当且仅当a=b时有f(a)=f(b),即$a^3-b^3=e^6-e$“,正确.

10. 答案　BD

命题意图　本题考查三角函数的概念及诱导公式、三角恒等变换的应用.

解析　由条件可知$\sin\alpha=\frac{4}{\sqrt{2+16}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$,所以$\cos(-\alpha)=\cos\alpha=-\frac{1}{3}$,故A错误；$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha=\frac{1}{3}$,故B正确；$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{7}{9}$,故C错误；$\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2\sqrt{2}$,故D正确.

11. 答案　AD

命题意图　本题考查三角函数的图象与性质.

解析$f(x)=-2\sin^2 ox+\sin 2wx+1=\cos 2wx+\sin 2\omega x=\sqrt{2}\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$,因为f(x)的最小正周期为π，所以w=1,得到$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

对于A，令 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$,k ∈Z,得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$,h ∈Z,当k=3时 ,$x=\frac{13\pi}{8}$, A正确；

对于B，令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$,k∈Z,得其单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{\pi}{8}\right],k\in\mathbf{Z}$,所以f(x)在 $\left(-\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right)$上单调递增， 又 $-\frac{\pi}{2}<-\frac{3\pi}{8}$,故B错误；

对于C，令f(x)=0,得 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$,h ∈Z,若 $x\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$,则x可取 $\frac{3\pi}{8},\frac{7\pi}{8}$9 $\frac{11\pi}{8}$,即有3个零点，C错误；

对于D，由 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$, 得$2x+\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$, $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$,所以f(x) ∈[-1,√2],D正确.

12. 答案 BC

命题意图 本题考查函数的性质.

解析 $f(x)=a+\frac{1}{a}+\frac{\ln(\sqrt{x^2+1}+x)}{x^2+1}$,令$g(x)=\frac{\ln(\sqrt{x^2+1}+x)}{x^2+1}$,对任意x∈**R**,$g(-x)=\frac{\ln(\sqrt{x^2+1}-x)}{x^2+1}=\frac{\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}}{x^2+1}=-\frac{\ln(\sqrt{x^2+1}+x)}{x^2+1}=-g(x)$， g(x)为奇函数， g(x)ma+g(x)mm=0,.M+N=g(x)max+ $g(x)_{\min}+2\left(a+\frac{1}{a}\right)=2\left(a+\frac{1}{a}\right)$. . . M+N与a有关，不是定值， 故A错误；因为$2\left(a+\frac{1}{a}\right)\geqslant 4\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=4$,故C正确； M-N=g(x)m - g(x)mn=2g(x)ma为定值，故B正确； $M-N\geqslant f(1)-f(-1)=\frac{\ln(\sqrt{2}+1)}{2}-\frac{\ln(\sqrt{2}-1)}{2}=\ln(\sqrt{2}+1)>\ln 2$,故D错误.

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 答案 6

命题意图 本题考查分段函数求值.

解析 log26 ∈(2,3),f(log26)=6.

14. 答案 2

命题意图 本题考查函数的性质.

解析 易知f(x)为奇函数，且在R上单调递增，由f(a)+f(a-4)=0,可得a=4-a,即a=2.

15. 答案 $\frac{\pi}{3}$

命题意图 本题考查差角的正弦公式的应用.

解析f(x)=2(sin xcos φ-cos xsinp)+4sin xcosφ=6sin xcosφ-2cos xsinφ=$\sqrt{(6\cos p)^2+(-2\sin p)^2}$· sin(x+a)=2$\sqrt{1+8\cos^2 p}$sin(x+α),其中$\tan\alpha=-\frac{\sin\varphi}{3\cos\varphi}$,所以f(x)mm=2$\sqrt{1+8\cos^2 p}$=2√3,得cosp=$\pm\frac{1}{2}$,则 φ 的最小值为$\frac{\pi}{3}$.

16. 答案 $\left[-2,-\frac{3}{2}\right)\cup\left[0,\frac{1}{2}\right)$

命题意图　本题考查函数的综合问题.

解析　若a<b≤0,则f(x)在[a,b]上单调递减，所以$\begin{cases}f(a)=b,\\f(b)=a,\end{cases}$所以$\begin{cases}\frac{1}{2}a^2+m=b,\\\frac{1}{2}b^2+m=a,\end{cases}$所以$\frac{1}{2}(a^2-b^2)=b-a=\frac{1}{2}(a-b)(a+b)$,所以a+b=-2,b=-2-a,所以 $m=-\frac{1}{2}a^2-a-2=-\frac{1}{2}(a+1)^2-\frac{3}{2}$,又因为a<b≤0,所以a<-2-a≤0,所以a∈(-2,-1),所以 $m\in\left[-2,-\frac{3}{2}\right)$ 当0≤a<b时，f(x)在[a,b]上单调递增，所以$\begin{cases}f(a)=a,\\f(b)=b,\end{cases}$所以$\begin{cases}\frac{1}{2}a^2+m=a,\\\frac{1}{2}b^2+m=b,\end{cases}$则关于x的方程$\frac{1}{2}x^2-x+m=0$有两个不同的非负根，所以$\begin{cases}m\geq0,\\\Delta=1-2m>0,\end{cases}$解得 $m\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 综上可知$m\in\left[-2,-\frac{3}{2}\right)\cup\left[0,\frac{1}{2}\right)$

四、解答题：共70分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. 命题意图　本题考查三角恒等变换的应用.

解析　(Ⅰ)由 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{3}$,得$\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=-\frac{1}{3}$,……………………(3分)

得 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$.……………………(5分)

(Ⅱ)$\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan\alpha-\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}$,……………………(8分)

将$\tan\alpha=\frac{1}{2}$代入上式，得$\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}=\frac{1}{5}$.……………………(10分)

18. 命题意图　本题考查函数零点的概念以及不等式的解法.

解析　(Ⅰ)因为2与-1是函数$f(x)=x^3+ax+b$的两个零点，

所以$\begin{cases}f(-1)=-1-a+b=0,\\f(2)=8+2a+b=0,\end{cases}$……………………(2分)

解得a=-3,b=-2,所以$f(x)=x^3-3x-2$,……………………(4分)

所以$f(1)=1^3-3-2=-4$.……………………(5分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)得$ax^2-bx+1=-3x^2+2x+1=(-3x-1)(x-1)$,

所以$x(-3x-1)(x-1)>0$,即$x(3x+1)(x-1)<0$……………………(7分)

若x>0,则(3x+1)(x-1)<0,得$-\frac{1}{3}<x<1$,所以0<x<1;……………………(9分)

若x<0,则(3x+1)(x-1)>0,得$x<-\frac{1}{3}$或$x>1$,所以$x<-\frac{1}{3}$.……………………(11分)

综上可得原不等式的解集为$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(0,1)$.……………………(12分)

19. 命题意图　本题考查函数的单调性，指数和对数函数的性质.

解析　(Ⅰ)f(x)在(0,+∞)上单调递减.……………………(1分)

证明：任取0<xi<x2,

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{}{e^{x_2}-1}-\frac{}{e^{x_1}-1}=\frac{}{(e^{x_1}-1)(e^{x_2}-1)}=\frac{}{(e^{x_1}-1)(e^{x_2}-1)}$$ …………………………（2分）

因为0<x1<x2,所以e¹1 - e²<0,e³1 - 1>0,e*2 - 1>0,

所以f(x2)-f(x1)<0,……………………………………………………………………（4分）

所以f(x)在(0,+o)上单调递减. ……………………………………………………（5分）

(II)当x<0时， e⁴>0,e⁴ - 1<0,所以f(x)<0;

当x>0时，$e^x-1>0,f(x)=1+\frac{1}{e^x-1}>1.$ ……………………………………（7分）

因为 $\log_3\frac{1}{2}<0$,所以 $b=f\left(\log_2\frac{1}{3}\right)<0.$ ……………………………………（8分）

因为0< √3<2<log310,由(I)知f(x)在(0,+c)上单调递减，

所以f(J3)>f(log310)>1,即a>c>1. ……………………………………………（10分）

因为f(- 1)<0,所以0<d=2- 1)<1. ……………………………………………（11分）

综上可得：b<d<c<a ……………………………………………………………（12分）

20.命题意图　本题考查三角函数的图象与性质.

解析　(I)设f(x)的最小正周期为T.

由题图得A=2,$T=2\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{\omega}=4$,・“. $\omega=\frac{\pi}{2}$. ……………………………（2分）

. $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=0$,结合图象可知$\frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$,k ∈Z,

.*. $\varphi=\frac{\pi}{4}+2k\pi$,h ∈Z,又O<φ<T,. . $\varphi=\frac{\pi}{4}$

$\therefore f(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\right).$ ……………………………………………………（4分）

令 $2k\pi-\pi\leqslant\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\leqslant2k\pi$,h ∈Z,解得 $4k-\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant4k-\frac{1}{2}$,k ∈Z,

:. f(x)的单调递增区间为$\left[4k-\frac{5}{2},4k-\frac{1}{2}\right],k\in\mathbf{Z}.$ ……………………………（6分）

(II)将f(x)的图象向右平移$\frac{1}{4}$个单位长度得到$y=2\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=2\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{8}\right)$的图象，

……………………………………………………………………………………（8分）

再将 $y=2\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{8}\right)$图象上的所有点的横坐标伸长为原来的$\frac{\pi}{2}$倍(纵坐标不变)

得到函数$g(x)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$的图象. ……………………………………（9分）

∵方程g(x)=a在$\left[\frac{\pi}{8},\frac{13\pi}{8}\right]$上有两个不等实根，　. y=a与y=g(x)的图象在$\left[\frac{\pi}{8},\frac{13\pi}{8}\right]$上有两个不同的交点. ……………………………………………………………………（10分）

∵函数g(x)在$\left[\frac{\pi}{8},\frac{7\pi}{8}\right]$上单调递减，在$\left[\frac{7\pi}{8},\frac{13\pi}{8}\right]$上单调递增，且$g\left(\frac{\pi}{8}\right)=g\left(\frac{13\pi}{8}\right)=\sqrt{2}$,$g\left(\frac{7\pi}{8}\right)=-2$,

:.-2<a≤√2,

即a的取值范围是(-2, √2). ………………………………………………………………………………………… (12分)

21. 命题意图 本题考查三角函数模型的应用.

解析 (I)根据题意设$H(t)=A\sin(wt+\varphi)+B(0\le t\le 40)$,其中$A>0,w>0$ …………………… (1分)

因为摩天轮的最高点距离地面85m,所以A+B=85,

转轮的直径为80m,即半径为40m,所以A=40,B=45 …………………………………………… (3分)

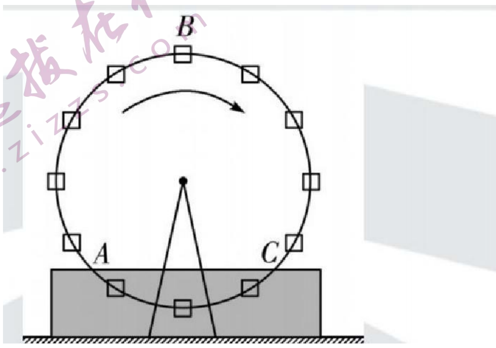
转一周需要40 min,即$\frac{2\pi}{\omega}=40$,所以$\omega=\frac{\pi}{20}$ …………………………………………… (4分)

因为t=0时, H(0)=B - A=5,得40sinφ+45=5,即sinφ= - 1,取 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$

所以$H(t)=40\sin\left(\frac{\pi}{20}t-\frac{\pi}{2}\right)+45,0\leqslant t\leqslant 40$ …………………………………………… (6分)

(其他等价的解析式同样给分)

(Ⅱ)如图所示.



由条件知,甲从点A转到点C经过的时间为28 min,所以从A点转到最高点B需要的时间为14 min,

又易知甲从最低点转到最高点需要的时间为20 min,故甲从最低点转到A点需要的时间为20-14=6(min),

所以甲进入座舱的时刻为10:08 …………………………………………………………… (9分)

楼房的高度为$H(6)=40\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{\pi}{2}\right)+45=-40\cos\frac{3\pi}{10}+45$,

根据参考数据可得$\cos\frac{3\pi}{10}=\sqrt{1-\sin^2\frac{3\pi}{10}}\approx\frac{3}{5}$.

所以H(6)≈21,即估计楼房的高度为21 m …………………………………………………… (12分)

22. 命题意图 本题考查抽象函数的性质以及不等式相关的问题.

解析 (I)由题可知函数f(x)的定义域为R,令x=y=0,得f(0)=2f(0),解得f(0)=0 ……… (1分)

令y= - x,得f(x)+f(- x)=f(0)=0,

所以f(-x)=-f(x),所以f(x)为奇函数. ……………………………………………………… (2分)

任取$x_1,x_2\in R$,且$x_1<x_2$,则$x_1-x_2<0$,

因为当x<0时, f(x)<0,所以$f(x_1-x_2)<0$,即$f(x_1)+f(-x_2)<0$,

因为f(x)为奇函数,所以$f(-x_2)=-f(x_2)$,则$f(x_1)-f(x_2)<0$,即$f(x_1)<f(x_2)$,

所以f(x)在R上单调递增. ……………………………………………………………………… (4分)

所以f(x)在[-4,2]上的最大值为f(2),最小值为f(-4).

因为f(1)=3,令x=y=1,得f(2)=f(1)+f(1)=6, ………………………………………… (5分)

因为f(x)为奇函数,所以f(-4)=-f(4)=-f(2+2)=-[f(2)+f(2)]=-12.

所以$f(x)$在$[-4,2]$上的最大值和最小值分别为6和-12. ………………………………………… (6分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知$f(x)$为奇函数，所以$f(-1)=-f(1)=-3$.

由$f(x^2)>f(ax)-3$得$f(x^2)>f(ax)+f(-1)$,即$f(x^2)>f(ax-1)$, ………………………………………… (7分)

又$f(x)$在R上单调递增，所以$x^2>ax-1$,即$x^2-ax+1>0$. ………………………………………… (8分)

因为不存在$x\in[1,3]$,使得$f(x^2)>f(ax)-3$,所以$\forall x\in[1,3]$, $x^2-ax+1\leqslant 0$. ………………………… (9分)

因为抛物线$y=x^2-ax+1$开口向上，所以$\begin{cases}1^2-a+1\leqslant 0,\\ 3^2-3a+1\leqslant 0,\end{cases}$ ………………………………………… (10分)

解得$\begin{cases}a\geqslant 2,\\ a\geqslant \dfrac{10}{3},\end{cases}$ 即$a\geqslant\dfrac{10}{3}$

所以a的取值范围是$\left[\dfrac{10}{3},+\infty\right)$. ………………………………………………………… (12分)