秘密★启用前

理科数学试卷

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.
2. 每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 在试题卷上作答无效.
3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回. 满分150分，考试用时120分钟.

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

D 1. 已知复数 $z=\dfrac{1}{1+i^3}$，则 $|z|=$

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

B 2. 已知集合 $A=\left\{x\left|x=\dfrac{1}{3}(2n+1),\ n\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|x=\dfrac{4}{3}n-1,\ n\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，则

A. $A\cup B=\mathbf{Z}$　　B. $A\cap B=A$　　C. $A\cap B=\varnothing$　　D. $A\cup B=A$

B 3. 已知命题 p：函数 $y=\log_a(x-1)+2(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的图象恒过定点 $(2,\ 2)$；命题 q：若直线 l 的倾斜角越大，则 l 的斜率就越大. 则下列命题中为真命题的是

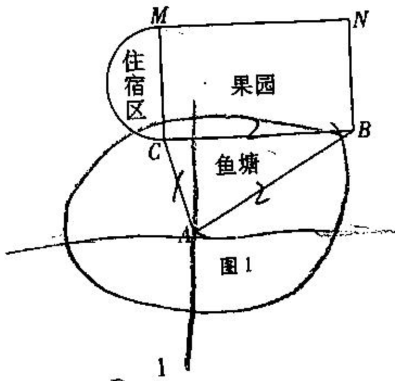
A. $\neg p\vee q$　　B. $p\wedge q$

C. $p\vee q$　　D. $\neg p\wedge q$

C 4. 若 $\tan\alpha=2$，则 $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2\alpha\right)+\cos2\alpha=$

A. $\dfrac{7}{5}$　　B. $-\dfrac{7}{5}$　　C. $-\dfrac{1}{5}$　　D. $\dfrac{1}{5}$

C 5. 为响应国家号召，大力发展三农产业，某农户在自家地块开起生态农家乐，如图1所示，建设了三个功能区，△ABC 为小型鱼塘养鱼供休闲垂钓，矩形 $BCMN$ 为果园种植区，以 CM 为直径的半圆区域为农家乐活动住宿区. 现农户欲对果园进行施肥，运来一批肥料放置于点 A 处，要把这批肥料沿鱼塘两侧的道路 AB，AC 送到矩形 $BCMN$ 的果园种植区去，若 $AB=CB=2$km，$AC=1$km，该农户在矩形 $BCMN$ 果园中画定了一条界线，使位于界线一侧的点沿道路 AB 运送肥料较近，而另一侧的点沿道路 AC 运送肥料较近，设这条界线是曲线 E 的一部分，则曲线 E 为



A. 双曲线

B. 圆

C. 椭圆

D. 抛物线

B 6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x,\ x<0,\\-8x^2-x+1,\ x\geq0,\end{cases}$ 若 $f(m)=f(2^m)$，则 $f(m+1)=$

A. -2　　B. 1　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

维护权益　严禁提前考试　第一举报者重奖1000元　电话：(0) [illegible]

C 7. $\left(\frac{1}{x}-2\right)(x+y)^6$ 的展开式中 x^4y^2 的系数为

A. 36　　B. −36　　C. −24　　D. 24

B 8. 已知△ABC 的外接圆圆心为 O，$AB=\sqrt{6}$，$AC=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AO}=$

A. 9　　B. 2　　C. 4　　D. 5

D 9. 甲、乙、丙、丁、戊五人随机地排成一行，则甲、乙两人相邻，丙、丁两人不相邻的概率为

A. $\frac{5}{12}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{3}$

A 10. 已知函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上是增函数，且在 $[0,4\pi]$ 上恰有一个极大值点与一个极小值点，则 ω 的取值范围为

A. $\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$　　B. $\left[\frac{1}{8},\frac{5}{8}\right)$　　C. $\left[\frac{1}{4},\frac{2}{3}\right)$　　D. $\left[\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right)$

C 11. 已知圆 M：$x^2+y^2-6y+8=0$，以圆 M 的圆心为焦点 F 的抛物线 E：$x^2=2py(p>0)$，过 F 的直线 l 与 M 交于 A，B 两点（A 在 B 的上方），l 与 E 交于 P，Q 两点（P 在 Q 的上方），则$\frac{1}{4}|AP|+|BQ|$的最小值为

A. $\frac{11}{2}$　　B. 7　　C. $\frac{25}{4}$　　D. 6

D 12. 已知函数 $f(x)=x\ln x+\frac{1}{2}(a-2)x^2-(x-1)e^x+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，则 a 的取值范围为

A. $(-\infty,4e]$　　B. $(-\infty,1]$

C. $(-\infty,3]$　　D. $(-\infty,e+1]$

$x^2+(y+4)^2=1$

$(x-2)^2+y^2=1$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 已知半径为 1 的圆 C 关于直线 $2x-y-4=0$ 对称，写出圆 C 的一个标准方程 x^2 [illegible]

14. 已知函数 $f(x)=\frac{\cos 2x}{x+1}$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ $(0,2)$ 处的切线方程为 $y=-4x+2$.

15. 在锐角△ABC 中，a，b，c 分别为角 A，B，C 的对边，满足 $a\cos B-b=b\cos A$，且△ABC 的面积 S 为$\frac{1}{4}$，则$(b+c+a)(b+c-a)$的取值范围为________.

16. 如图 2，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M，N 分别为棱 B_1C_1，CD 上的动点（包含端点），则下列说法正确的是 ② ________.

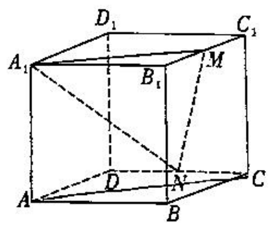


图 2

①当 M 为棱 B_1C_1 的中点时，则在棱 CD 上存在点 N 使得 $MN\perp AC$；

②当 M，N 分别为棱 B_1C_1，CD 的中点时，则在正方体中存在棱与平面 A_1MN 平行；

③当 M，N 分别为棱 B_1C_1，CD 的中点时，则过 A_1，M，N 三点作正方体的截面，所得截面为五边形；

④直线 MN 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值的最小值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$；

⑤若正方体的棱长为 2，点 D_1 到平面 A_1MN 的距离最大值为$\sqrt{2}$.

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

1

三、解答题（共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）

设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_1a_2a_3=8$，试从下列两个条件：①$S_{2n}=3(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})(n\in\mathbf{N}^*)$，②$S_{n+m}=S_n+2^nS_m(n, m\in\mathbf{N}^*)$中选取一个条件解答下列问题：

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设 $b_n=(-1)^{n-1}(a_n+\log_2a_{2n})(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{b_n\}$的前 $2n$ 项和 T_{2n}.

18.（本小题满分 12 分）

近年来，由于耕地面积的紧张，化肥的施用量呈增加趋势. 一方面，化肥的施用对粮食增产增收起到了关键作用，另一方面，也成为环境污染、空气污染、土壤污染的重要来源之一. 如何合理地施用化肥，使其最大程度地促进粮食增产，减少对周围环境的污染成为需要解决的重要问题. 研究粮食产量与化肥施用量的关系，成为解决上述问题的前提. 某研究团队收集了 10 组化肥施用量和粮食亩产量的数据并对这些数据作了初步处理，得到了如图 3 所示的散点图及一些统计量的值. 化肥施用量为 x(单位：公斤)，粮食亩产量为 y(单位：百公斤).

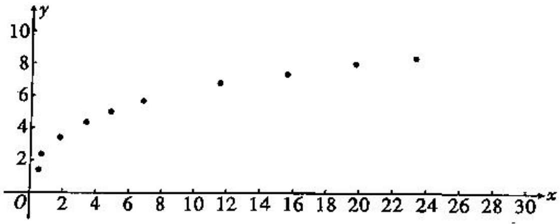


图 3

参考数据：

$\sum_{i=1}^{10}x_iy_i$	$\sum_{i=1}^{10}x_i$	$\sum_{i=1}^{10}y_i$	$\sum_{i=1}^{10}x_i^2$	$\sum_{i=1}^{10}t_iz_i$	$\sum_{i=1}^{10}t_i$	$\sum_{i=1}^{10}z_i$	$\sum_{i=1}^{10}t_i^2$
650	91.5	52.5	1478.6	30.5	15	15	46.5

表中 $t_i=\ln x_i$，$z_i=\ln y_i(i=1, 2, \cdots, 10)$.

（1）根据散点图判断，$y=a+bx$ 与 $y=cx^d$，哪一个适宜作为粮食亩产量 y 关于化肥施用量 x 的回归方程类型（给出判断即可，不必说明理由）；

（2）根据（1）的判断结果及表中数据，建立 y 关于 x 的回归方程；并预测化肥施用量为 27 公斤时，粮食亩产量 y 的值；

（3）经生产技术提高后，该化肥的有效率 Z 大幅提高，经试验统计得 Z 大致服从正态分布 $N(0.54, 0.02^2)$. 那么这种化肥的有效率超过 56%的概率约为多少？

附：①对于一组数据$(u_i, v_i)(i=1, 2, 3, \cdots, n)$，其回归直线 $\hat{v}=\hat{\beta}u+\hat{\alpha}$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{\beta}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}u_iv_i-n\bar{u}\bar{v}}{\sum_{i=1}^{n}u_i^2-n\bar{u}^2}$，$\hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{\beta}\bar{u}$；

②若随机变量 $Z\sim N(\mu, \sigma^2)$，则有 $P(\mu-\sigma<Z<\mu+\sigma)\approx0.6826$，$P(\mu-2\sigma<Z<\mu+2\sigma)\approx0.9544$；

③取 $e\approx2.7$.

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

维护权益　严禁提前考试　第一举报者重奖 1000 元　电话：(0) 18987573845

19.（本小题满分 12 分）

如图 4，O 是圆锥底面圆的圆心，圆锥的轴截面 PAB 为直角三角形，C 是底面圆周上异于 A，B 的任一点，D 是线段 AC 的中点，$AC=2\sqrt{3}$，$BC=2$.

（1）证明：平面 $POD\perp$ 平面 PAC；

（2）在母线 PA 上是否存在一点 E，使二面角 $P-OD-E$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$，若存在，请说明点 E 的位置；若不存在，请说明理由.

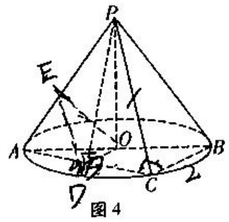


图 4

20.（本小题满分 12 分）

已知点 $A(0,-2)$，$B(0,2)$，动点 P 满足直线 PA 与 PB 的斜率之积为 $-\frac{2}{3}$. 记点 P 的轨迹为曲线 C.

（1）求 C 的方程；

（2）过 x 轴上一点 Q 且不与坐标轴平行的直线与 C 交于 M，N 两点，线段 MN 的垂直平分线与 x 轴交于点 R，若 $|MN|=2\sqrt{3}|QR|$，求点 Q 的坐标.

21.（本小题满分 12 分）

已知 $a>0$，函数 $f(x)=xe^{x}-ax^{3}+3ax+1$.

（1）讨论 $f(x)$ 的极值点个数；

（2）若函数 $f(x)$ 有三个极值点 x_1，x_2，x_3，设 $x_1<x_2<x_3$，证明：$x_3+(e^2-2e)x_2+x_1\geqslant e^2-e$.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，并用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑. 注意所做题目的题号必须与所涂题目的题号一致，在答题卡选答区域指定位置答题. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）【选修 4-4：坐标系与参数方程】

心形线，是一个圆上的固定一点在它绕着与其相切且半径相同的另外一个圆周滚动时所形成的轨迹，因其形状像心形而得名. 如图 5，在极坐标系中，方程 $\rho=a(1-\sin\theta)(a>0)$ 表示的曲线 C_1 就是一条心形线. 以极轴 Ox 所在的直线为 x 轴，极点 O 为坐标原点的直角坐标系 xOy 中，曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+2\cos\varphi,\\ y=2\sin\varphi,\end{cases}$（$\varphi$ 为参数），C_1 与 C_2 的其中一个交点 A（异于点 O）在 x 轴上.

（1）求 C_2 的极坐标方程及 a；

（2）已知曲线 C_3 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+4t,\\ y=\frac{3}{4}+3t,\end{cases}$（$t$ 为参数），C_1 与 C_3 相交于 E，O，F 三点，求 $|EF|$.

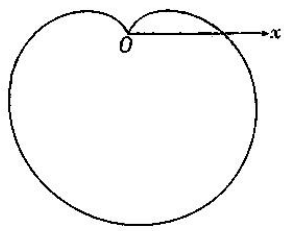


图 5

23.（本小题满分 10 分）【选修 4-5：不等式选讲】

已知函数 $f(x)=|ax-1|$.

（1）若当 $x\in[1,2]$ 时，不等式 $f(x)\leqslant 2$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（2）当 $a=1$ 时，若 $|m|\geqslant 1$，$|n|\geqslant 1$，证明：$f(mn)\geqslant f(m)-f(n)$.

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

理科数学参考答案

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	D	C	B	A	C	C	B	B	D	A	C

【解析】

1. $z=\frac{1}{1+i^3}=\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$，所以 $|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故选D.

2. 由于 $B=\left\{x\middle|x=\frac{4n-3}{3},\ n\in Z\right\}=\left\{x\middle|x=\frac{4(n-1)+1}{3},\ n\in Z\right\}$，任取 $x\in B$，则 $x=\frac{4(n-1)+1}{3}$ $=\frac{2\cdot(2n-2)+1}{3}$，其中 $n\in Z$，即 $x\in A$，所以 $B\subseteq A$，则有 $A\cup B=A$，故选D.

3. 令 $x-1=1$，即 $x=2$，所以 $y=2$，所以函数 $y=\log_a(x-1)+2$ 的图象过定点 $(2,\ 2)$，则命题 p 为真命题；若直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$，则其斜率为1，若直线 l 的倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$，则其斜率为 -1，不满足倾斜角越大，斜率就越大，所以命题 q 为假命题；所以 $p\wedge q$ 为假命题，$p\vee q$ 为真命题，$\neg p\wedge q$ 为假命题，$\neg p\vee q$ 为假命题，故选C.

4. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)+\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$ $=\frac{1-\tan^2\alpha-2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{1-2^2-2\times 2}{2^2+1}=-\frac{7}{5}$，故选B.

5. 由题意，从点 A 出发经 C 到界线上一点 P，与从点 A 出发经 B 到 P，所走的路程是一样的，即 $|AC|+|PC|=|AB|+|PB|$，所以 $|PC|-|PB|=|AB|-|AC|$，又由 $AB=CB=2\text{km}$，$AC=1\text{km}$，所以 $|PC|-|PB|=1<|CB|$，根据双曲线的定义可知曲线 E 为双曲线的一部分，故选A.

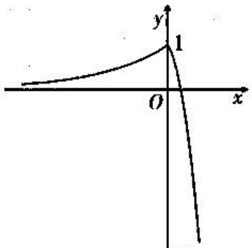


图1

6. 由题，$f(x)$ 的图象如图1所示，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ 0)$ 上是增函数，在 $[0,\ +\infty)$ 上是减函数. 由于 $f(m)=f(2^m)$，且对于任意 $m\in R$ 都有 $m<2^m$，则有 $m<0$，所以 $2^m=-8\cdot(2^m)^2-2^m+1$，即 $8\cdot(2^m)^2+2\cdot 2^m-1=0$，解得 $2^m=\frac{1}{4}$，所以 $m=-2$，则 $f(m+1)=f(-1)=\frac{1}{2}$，故选C.

7. 由题意得 $(x+y)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r\cdot x^{6-r}\cdot y^r\ (r=0,\ 1\ \cdots,\ 6)$；当 $r=1$ 时，

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

$T_2=C_6^1x^{6-1}y=6x^5y$，此时只需乘以第一个因式$\left(\frac{y}{x}-2\right)$中的$\frac{y}{x}$即可，得到$6x^4y^2$；当$r=2$时，$T_3=C_6^2x^{6-2}y^2=15x^4y^2$，此时只需乘以第一个因式$\left(\frac{y}{x}-2\right)$中的$-2$即可，得到$-30x^4y^2$；据此可得，$\left(\frac{y}{x}-2\right)(x+y)^6$的展开式中$x^4y^2$的系数为$-24$，故选C.

8．在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，所以$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AO}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}$．如图2所示，连接$AO$并延长与圆$O$交于点$E$，连接$EB$，因为$O$是圆心，所以$AB\perp EB$，则有$|AE|\cos\angle OAB=2|AO|\cos\angle OAB=|AB|$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AO}|\cdot\cos\angle OAB=\frac{|\overrightarrow{AB}|^2}{2}=3$；同理可得$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{3}{2}$，所以$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AO}=2$，故选B.

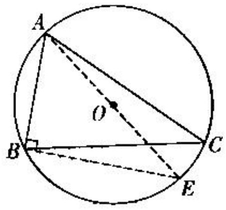


图2

9．记甲、乙两人相邻，丙、丁两人不相邻为事件A．甲、乙、丙、丁、戊五人随机地站成一排的所有排法有$A_5^5=5\times4\times3\times2\times1=120$种，而甲、乙两人相邻，丙、丁两人不相邻的排法有$A_2^2A_2^2A_3^2=24$种，所以$P(A)=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$，故选B.

10．由题$\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right]\subseteq\left[-\frac{\pi}{2\omega},\frac{\pi}{2\omega}\right]$，所以有$\frac{3\pi}{4}\le\frac{\pi}{2\omega}$，得$\omega\le\frac{2}{3}$，又因为$\omega>0$，所以$0<\omega\le\frac{2}{3}$；又$f(x)$在$x=\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{2\omega}\ (k\in Z)$处取得极大值，在$x=\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{3\pi}{2\omega}\ (k\in Z)$处取得极小值，可得$0<\frac{3\pi}{2\omega}\le4\pi<\frac{5\pi}{2\omega}$，所以$\frac{3}{8}\le\omega<\frac{5}{8}$，则$\omega\in\left[\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right)$，故选D.

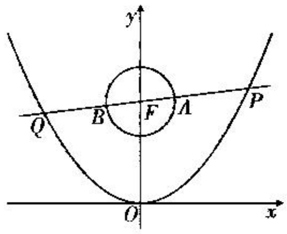


图3

11．如图3，由题，可知$F(0,3)$，圆M的半径为1；设$P(x_P,y_P)$，$Q(x_Q,y_Q)$，设直线l_{PQ}的方程为$y=kx+3$，联立，得$\begin{cases}x^2=12y,\\ y=kx+3,\end{cases}$所以$y^2-(6+12k^2)y+9=0$，且$\Delta=(6+12k^2)^2-36\ge0$，所以$y_P\cdot y_Q=9$．又$|AP|=|PF|-1=y_P+3-1=y_P+2$，$|BQ|=|QF|-1=y_Q+3-1=y_Q+2$，所以$\frac{1}{4}|AP|+|BQ|=\frac{1}{4}(y_P+2)+(y_Q+2)=\frac{1}{4}y_P+y_Q+\frac{5}{2}\ge2\sqrt{\frac{1}{4}y_Py_Q}+\frac{5}{2}=\frac{11}{2}$（当且仅当$y_P=4y_Q$时取

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

等号），即当 $y_P=6$，$y_Q=\frac{3}{2}$ 时，$\frac{1}{4}|AP|+|BQ|$ 的最小值为 $\frac{11}{2}$，故选A.

12．由题 $f'(x)=\ln x+1+(a-2)x-xe^x\le 0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，即 $a\le e^x-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+2$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立；设 $g(x)=e^x-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+2\ (x>0)$，则有 $g'(x)=\frac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$；令 $g'(x)=0$，得 $x^2e^x+\ln x=0$，即 $xe^x=\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\ (x>0)$．由于 $h(t)=te^t$ 在 $t\in(0,+\infty)$ 上是增函数，则存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $h(x_0)=h(-\ln x_0)$，即 $x_0=-\ln x_0$ $\left(e^{x_0}=\frac{1}{x_0}\right)$，此时 $g'(x_0)=0$．由于当 $0<x<x_0$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上是减函数；当 $x>x_0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上是增函数，所以当 $x=x_0$ 时，$g(x)_{min}=g(x_0)=e^{x_0}-\frac{\ln x_0}{x_0}-\frac{1}{x_0}+2=3$，则有 $a\le 3$，故 $a\in(-\infty,3]$，故选C.

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

题号	13	14	15	16
答案	$(x-2)^2+y^2=1$（答案不唯一，只要圆心 C 在直线 $2x-y-4=0$ 上，半径为1，均可.）	$x+y-1=0$	$(1,\sqrt{3})$	①③④

【解析】

13．当圆心 C 为 $(2,0)$，圆 C 的标准方程为 $(x-2)^2+y^2=1$．（答案不唯一，只要圆心 C 在直线 $2x-y-4=0$ 上，半径为1，均可．）

14．由题，得 $f'(x)=\frac{-2\sin 2x\cdot(x+1)-\cos 2x}{(x+1)^2}$，则 $f'(0)=-1$，而 $f(0)=1$，所以所求切线方程为 $y-1=-x$，即 $x+y-1=0$．

15．由正弦定理，得 $\sin A\cos B=\sin B(1+\cos A)$，即 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin B$，则 $\sin(A-B)=\sin B$，因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，所以 $A-B=B$，即 $A=2B$；由于 $A=2B<\frac{\pi}{2}$，所以 $B<\frac{\pi}{4}$；又 $A+B=3B>\frac{\pi}{2}$，所以 $B>\frac{\pi}{6}$，即 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{4}$；又 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{4}$，所以 $bc=\frac{1}{2\sin A}$；由于 $(b+c+a)(b+c-a)=b^2+c^2-a^2+2bc=2bc(\cos A+1)=\frac{1}{\sin A}(\cos A+1)=\frac{1}{\tan B}$．因为 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{4}$，所以 $\frac{\sqrt{3}}{3}<\tan B<1$，所以 $\frac{1}{\tan B}\in(1,\sqrt{3})$．

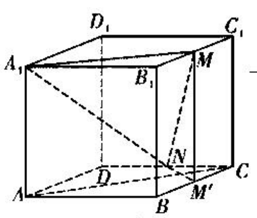


图4

6．①如图4，当 N 为 CD 的中点时，过 M 作 $MM'\perp BC$ 于 M'，所以 $MM'\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $MM'\perp AC$，又 $M'N\perp AC$，$M'N$ 与 MM' 相交于 M'，所以 $AC\perp$ 平面 $MM'N$，又 $MN\subset$ 平面 $MM'N$，所以 $MN\perp AC$，故①正确；②在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，棱可分为三类，分别是与 DA，DC，DD_1 平行的棱，又 DA，DC，DD_1 不与平面 A_1MN 平行，所以在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，不存在棱与平面 A_1MN 平行，故②错误；③如图5，取 BC 中点 M'，连接 AM'，所以 $AM'\parallel A_1M$，过 N 作 AM' 的平行线交 AD 于点 E，此时 $DE=\frac{1}{4}DA$，所以 $EN\parallel A_1M$，即 EN 为过 A_1，M，N 三点的平面与平面 $ABCD$ 的交线；连接 A_1E，在 BC 上取点 F，使得 $CF=\frac{1}{4}CB$，所以 $A_1E\parallel B_1F$，再过点 M 作 B_1F 的平行线交 CC_1 于点 G，此时 $CG=\frac{1}{3}CC_1$，所以 $A_1E\parallel MG$，即 MG 为过 A_1，M，N 三点的平面与平面 BCC_1B_1 的交线；连接 NG，则可得五边形 A_1MGNE 即为正方体中过 A_1，M，N 三点的截面，故③正确；④设正方体棱长为2，如图6，过 M 作 $MM'\perp BC$ 于 M'，所以 $MM'\perp$ 平面 $ABCD$，所以 MN 与平面 $ABCD$ 所成角即为 $\angle MNM'$，所以 $\tan\angle MNM'=\frac{MM'}{M'N}=\frac{2}{M'N}$；又 $M'N$ 长度的最大值为 $2\sqrt{2}$，所以 MN 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，故④正确；⑤M，N 在棱 B_1C_1，CD 上运动时，M 到 A_1D_1 距离始终为2，N 到平面 A_1D_1M 的距离始终为2，所以 $V_{D_1-A_1MN}=V_{N-A_1MD_1}=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=\frac{4}{3}$ 恒为定值．要使 D_1 到平面 A_1MN 的距离最大，则三角形 A_1MN 的面积应为最小．当 M，N 分别运动到 C_1，C 时，$S_{\triangle A_1MN}=2\sqrt{2}$，此时 D_1 到平面 A_1MN 的距离为 $\sqrt{2}$；当 M，N 分别运动到棱 B_1C_1，CD 中点时，$A_1M=\sqrt{5}$，$MN=\sqrt{6}$，$A_1N=3$，所以 $\cos\angle A_1MN=\frac{5+6-9}{2\sqrt{30}}=\frac{1}{\sqrt{30}}$，则 $S_{\triangle A_1MN}=\frac{1}{2}\cdot A_1M\cdot MN\cdot\sin\angle A_1MN=\frac{1}{2}\times\sqrt{30}\times\sqrt{\frac{29}{30}}=\frac{\sqrt{29}}{2}$；又 $\frac{\sqrt{29}}{2}<2\sqrt{2}$，所以当 M，N 为 B_1C_1，CD 中点时，D_1 到平面 A_1MN 的距离应大于 $\sqrt{2}$，所以⑤错误．综上，答案为①③④．

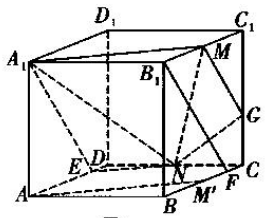


图5

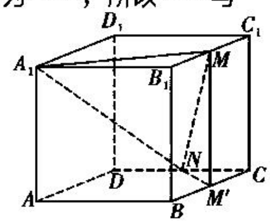


图6

三、解答题（共70分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

7．（本小题满分12分）

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

解：（1）因为 $a_1a_2a_3=8$，$\{a_n\}$ 是等比数列，

所以 $a_2^3=8$，解得 $a_2=2$．

选择条件①，由 $S_{2n}=3(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})$，可得 $S_2=3a_1$，则 $a_2=2a_1$，

所以 $a_1=1$，公比 $q=\dfrac{a_2}{a_1}=2$，所以 $a_n=2^{n-1}$．

选择条件②，由 $S_{n+m}=S_n+2^nS_m$，可得 $S_2=a_1+2a_1$，则 $a_2=2a_1$，

所以 $a_1=1$，公比 $q=\dfrac{a_2}{a_1}=2$，所以 $a_n=2^{n-1}$． ……………………………………（6分）

（2）$b_n=(-1)^{n-1}(a_n+\log_2 a_{2n})=(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}+(-1)^{n-1}\cdot(2n-1)=(-2)^{n-1}+(-1)^{n-1}\cdot(2n-1)$，

所以 $T_{2n}=b_1+b_2+\cdots+b_{2n}=[(-2)^0+(-2)^1+\cdots+(-2)^{2n-1}]+$

$[(-1)^0\times1+(-1)^1\times3+\cdots+(-1)^{2n-2}\times(4n-3)+(-1)^{2n-1}\times(4n-1)]$

$=\dfrac{1-(-2)^{2n}}{1-(-2)}+[(1-3)+\cdots+(4n-3-4n+1)]=\dfrac{1-4^n}{3}-2n=\dfrac{1}{3}(1-4^n-6n)$．

……………………………………………………………（12分）

18．（本小题满分12分）

解：（1）根据散点图可判断，$y=cx^d$ 更适合作为 y 关于 x 的回归方程类型．

……………………………………………………………（2分）

（2）对 $y=cx^d$ 两边取对数，得 $\ln y=\ln c+d\ln x$，即 $z=\ln c+dt$，

由表中数据得：$\bar{z}=\bar{t}=1.5$，$d=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}t_iz_i-10\bar{t}\bar{z}}{\sum\limits_{i=1}^{10}t_i^2-10\bar{t}^2}=\dfrac{30.5-10\times1.5\times1.5}{46.5-10\times1.5\times1.5}=\dfrac{1}{3}$，

$\ln c=\bar{z}-d\bar{t}=1.5-\dfrac{1}{3}\times1.5=1$，所以 $c=e$，

所以 y 关于 x 的回归方程为 $y=ex^{\frac{1}{3}}$． ……………………………………（6分）

当 $x=27$ 时，$y=e\times27^{\frac{1}{3}}=2.7\times3=8.1$，

所以当化肥施用量为27公斤时，粮食亩产量约为810公斤． ……………………（8分）

（3）依题意 $Z\sim N(0.54,\ 0.02^2)$，则有 $\mu=0.54,\ \sigma=0.02$，

所以 $P(\mu-\sigma<Z<\mu+\sigma)=P(0.52<Z<0.56)\approx0.6826$，

则 $P(Z\geq 0.56)=\dfrac{1-0.6826}{2}=0.1587$，

即这种化肥的有效率超过56%的概率约为0.1587． ……………………………（12分）

19．（本小题满分12分）

（1）证明：由圆锥的性质可知，$PO\perp$ 底面圆，

又 AC 在底面圆 O 上，所以 $AC \perp PO$．

又 C 在圆 O 上，AB 为直径，所以 $AC \perp BC$．

又点 O，D 分别为 AB，AC 的中点，所以 $OD // BC$，所以 $OD \perp AC$．

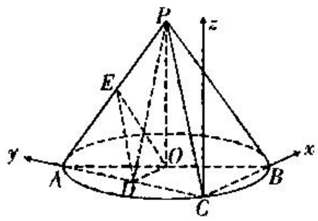
又 $OD \cap PO = O$，且 OD，$PO \subset$ 平面 POD，所以 $AC \perp$ 平面 POD；

又 $AC \subset$ 平面 PAC，所以平面 $POD \perp$ 平面 PAC． ………………………………（4分）

(2) 解：存在，E 为母线 PA 的中点．

由题意知 $PO \perp$ 平面ABC，$CA \perp CB$，

故以 C 为原点，CB, CA 及平行于 OP 所在的直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系 $C-xyz$（如图7所示）．



又 $AC = 2\sqrt{3},\ BC = 2$，

所以 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 4$，

又因为 $\triangle PAB$ 为直角三角形，

所以 $PO = \frac{1}{2}AB = 2$，

所以 $A(0,\ 2\sqrt{3},\ 0)$，$D(0,\ \sqrt{3},\ 0)$，$O(1,\ \sqrt{3},\ 0)$，$P(1,\ \sqrt{3},\ 2)$，设 E 点坐标为 $(x,\ y,\ z)$，

所以 $\overrightarrow{DO} = (1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{PE} = (x-1,\ y-\sqrt{3},\ z-2)$，$\overrightarrow{PA} = (-1,\ \sqrt{3},\ -2)$．

又 P，E，A 三点共线，设 $\overrightarrow{PE} = \lambda\overrightarrow{PA}$，即 $(x-1,\ y-\sqrt{3},\ z-2) = \lambda(-1,\ \sqrt{3},\ -2)$，

所以 E 点坐标为 $(1-\lambda,\ \sqrt{3}+\sqrt{3}\lambda,\ 2-2\lambda)$，所以 $\overrightarrow{DE} = (1-\lambda,\ \sqrt{3}\lambda,\ 2-2\lambda)$．

设平面 ODE 的法向量为 $\vec{m} = (x_1,\ y_1,\ z_1)$，

则 $\begin{cases} \vec{m}\cdot\overrightarrow{DO} = 0, \\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DE} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1 = 0, \\ (1-\lambda)x_1 + \sqrt{3}\lambda y_1 + (2-2\lambda)z_1 = 0, \end{cases}$

所以可取 $y_1 = 1,\ z_1 = \frac{\sqrt{3}\lambda}{2\lambda-2}$，即 $\vec{m} = \left(0,\ 1,\ \frac{\sqrt{3}\lambda}{2\lambda-2}\right)$．

设平面 POD 的法向量为 $\vec{n} = (x_2,\ y_2,\ z_2)$，因为 $AC \perp$ 平面 POD，故可取 $\vec{n} = (0,\ 1,\ 0)$．

所以 $\cos\langle\vec{m},\ \vec{n}\rangle = \frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}\lambda}{2\lambda-2}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$，解得 $\lambda = \frac{1}{2}$，即 $\overrightarrow{PE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PA}$，

所以母线 PA 上存在一点 E，使得二面角 $P-OD-E$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$，

此时点 E 为母线 PA 的中点． ………………………………………（12分）

20．（本小题满分12分）

解：（1）设点 $P(x,\ y)$，则直线 PA，PB 的斜率之积为 $\dfrac{y+2}{x}\cdot\dfrac{y-2}{x}=-\dfrac{2}{3}(y\neq\pm2)$，

整理得 $2x^2+3y^2=12$，即 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{4}=1(y\neq\pm2)$，

因此，点 P 的轨迹曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{4}=1(y\neq\pm2)$．……………………（4分）

（2）设点 $Q(n,\ 0)$，直线 l_{MN}：$x=my+n\ (m\neq0)$，$M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$．

由 $\begin{cases}x=my+n,\\2x^2+3y^2-12=0,\end{cases}$ 得 $(2m^2+3)y^2+4mny+2n^2-12=0$，

则当 $\Delta=24(4m^2-n^2+6)>0$ 时，$y_1+y_2=\dfrac{-4mn}{2m^2+3}$，$y_1y_2=\dfrac{2n^2-12}{2m^2+3}$，

所以 $|MN|=\sqrt{1+m^2}\dfrac{\sqrt{24(4m^2-n^2+6)}}{2m^2+3}$．……………………………………（8分）

又线段 MN 的中点为 $\left(\dfrac{-2m^2n}{2m^2+3}+n,\ \dfrac{-2mn}{2m^2+3}\right)$，即 $\left(\dfrac{3n}{2m^2+3},\ \dfrac{-2mn}{2m^2+3}\right)$，

所以线段 MN 的垂直平分线的方程为 $y-\dfrac{-2mn}{2m^2+3}=-m\left(x-\dfrac{3n}{2m^2+3}\right)$，

令 $y=0$，得 $x_R=\dfrac{n}{2m^2+3}$，所以 $R\left(\dfrac{n}{2m^2+3},\ 0\right)$．

由 $|MN|=2\sqrt{3}|QR|$，得 $\sqrt{1+m^2}\dfrac{\sqrt{24(4m^2-n^2+6)}}{2m^2+3}=2\sqrt{3}\left|n-\dfrac{n}{2m^2+3}\right|$，

整理得 $\sqrt{8(1+m^2)+4-2n^2}=|2n|\sqrt{1+m^2}$，

所以 $(4-2n^2)(2m^2+3)=0$，则有 $n=\pm\sqrt{2}$，即点 $Q(\pm\sqrt{2},\ 0)$．……………………（12分）

:1．（本小题满分12分）

（1）解：由题，可知，$f(x)$ 的定义域为 $x\in\mathbf{R}$，

$f'(x)=(x+1)e^x-3ax^2+3a=(x+1)[e^x-3a(x-1)]$

令 $g(x)=\dfrac{x-1}{e^x}$，则 $g'(x)=\dfrac{1-(x-1)}{e^x}=\dfrac{2-x}{e^x}$，

当 $x<2$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,\ 2)$ 上单调递增；

当 $x>2$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(2,\ +\infty)$ 上单调递减；所以 $g(x)_{\max}=g(2)=\dfrac{1}{e^2}$．

①当 $a>\dfrac{e^2}{3}$ 时，即 $0<\dfrac{1}{3a}<\dfrac{1}{e^2}$，又 $g(1)=0$，则有当 $x>1$ 时，$g(x)>0$，当 $x<1$ 时，

$g(x)<0$，且当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to0$，所以函数 $g(x)$ 的图象与 $y=\dfrac{1}{3a}$ 有两个不同的交点在 $x\in(1,\ +\infty)$ 上，即方程 $e^x-3a(x-1)=0$ 有两解 x_2，x_3 $(x_2<x_3)$ 在 $x\in(1,\ +\infty)$ 上．

又 $f'(-1)=0$，记 $x_1=-1$，则有 $f'(x_1)=f'(x_2)=f'(x_3)=0$，且 $x_1<x_2<x_3$，

官方微信公众号：zizzsw
咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com
微信客服：zizzs2018

所以当 $x<x_1$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 上单调递减；

当 $x_1<x<x_2$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 (x_1, x_2) 上单调递增；

当 $x_2<x<x_3$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 (x_2, x_3) 上单调递减；

当 $x>x_3$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(x_3, +\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 有3个极值点 x_1，x_2，x_3.

②当 $0<a\le\dfrac{e^2}{3}$ 时，对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $g(x)=\dfrac{x-1}{e^x}\le\dfrac{1}{e^2}\le\dfrac{1}{3a}$，所以 $e^x-3a(x-1)\ge 0$；

又 $f'(-1)=0$，所以当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减；

当 $x>-1$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增；

所以 $f(x)$ 有一个极值点 -1.

综上，得当 $a>\dfrac{e^2}{3}$ 时，$f(x)$ 有3个极值点；当 $0<a\le\dfrac{e^2}{3}$ 时，$f(x)$ 有1个极值点.

………………………………………………………………（6分）

(2) 证明：由（1）可知，$x_1=-1$，要证 $x_3+(e^2-2e)x_2+x_1\ge e^2-e$，

只需证 $x_3+(e^2-2e)x_2\ge e^2-e+1$.

由 $e^{x_2}-3a(x_2-1)=0$，$e^{x_3}-3a(x_3-1)=0$，令 $t=x_3-x_2$，则 $t>0$，

则有 $\begin{cases} e^{x_3-x_2}=\dfrac{x_3-1}{x_2-1}, \\ t=x_3-x_2, \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x_2=\dfrac{t}{e^t-1}+1, \\ x_3=\dfrac{t}{e^t-1}+t+1. \end{cases}$

要证 $x_3+(e^2-2e)x_2\ge e^2-e+1$，即证 $\dfrac{(e-1)^2t}{e^t-1}+t-e\ge 0$，又由于 $t>0$，$e^t-1>0$，

即证不等式 $(e-1)^2t+(e^t-1)(t-e)\ge 0$ 在 $t\in(0, +\infty)$ 上恒成立.

令 $h(t)=(e-1)^2t+(e^t-1)(t-e)$（$t>0$），

则有 $h'(t)=(t-e+1)e^t+e^2-2e$，$h''(t)=(t-e+2)e^t$；令 $h''(t)=0$，得 $t=e-2$；

所以当 $0<t<e-2$ 时，$h''(t)<0$，则 $h'(t)$ 在 $(0, e-2)$ 上单调递减；

当 $t>e-2$ 时，$h''(t)>0$，则 $h'(t)$ 在 $(e-2, +\infty)$ 上单调递增.

又 $h'(0)=e^2-3e+1>0$，$h'(1)=0$，则有 $h'(e-2)<0$，

所以存在唯一 $t_0\in(0, e-2)$，使得 $h'(t_0)=0$；

所以当 $0<t<t_0$ 时，$h'(t)>0$，则 $h(t)$ 在 $(0, t_0)$ 上单调递增；

当 $t_0<t<1$ 时，$h'(t)<0$，则 $h(t)$ 在 $(t_0, 1)$ 上单调递减；

所以当 $t>1$ 时，$h'(t)>0$，则 $h(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

又 $h(0)=0$，$h(1)=0$，则有 $h(t_0)>0$，所以当 $t>0$ 时，$h(t)\geq 0$，故原不等式成立.

……………………………………………………………… (12分)

22. （本小题满分10分）【选修4-4：坐标系与参数方程】

解：（1）消去曲线 C_2 参数方程中的 φ，可得 $(x+2)^2+y^2=4$；

又由 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，所以曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=-4\cos\theta$；

……………………………………………………………… (3分)

由于曲线 C_2 与 x 轴的其中一个交点 A（异于点 O）的极坐标为 $(4,\ \pi)$，

所以 $4=a(1-\sin\pi)$，即 $a=4$. ………………………………………… (5分)

(2) 消去曲线 C_3 参数方程中的 t，可得 $y=\dfrac{3}{4}x$；

设直线 $y=\dfrac{3}{4}x$ 的倾斜角为 α，则有 $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$ 且 $\alpha\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，

所以曲线 C_3 的极坐标方程为 $\theta=\alpha(\rho\in\mathbf{R})$.

由 $\begin{cases}\theta=\alpha,\\ \rho=4(1-\sin\theta),\end{cases}$ 得 $|OE|=|\rho_E|=4(1-\sin\alpha)>0$，$|OF|=|\rho_F|=4(1+\sin\alpha)>0$，

所以 $|EF|=|OE|+|OF|=4(1-\sin\alpha)+4(1+\sin\alpha)=8$. ………………………… (10分)

23. （本小题满分10分）【选修4-5：不等式选讲】

(1) 解：由题，可得 $\begin{cases}f(1)\leq 2,\\ f(2)\leq 2,\end{cases}$ 则有 $\begin{cases}|a-1|\leq 2,\\ |2a-1|\leq 2,\end{cases}$

所以 $-\dfrac{1}{2}\leq a\leq\dfrac{3}{2}$，即 $a\in\left[-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right]$. ………………………………… (5分)

(2) 证明：由绝对值三角不等式，可得

$f(m)-f(n)=|m-1|-|n-1|\leq|(m-1)-(n-1)|=|m-n|$；

由于 $(mn-1)^2-(m-n)^2=m^2n^2+1-m^2-n^2=(m^2-1)(n^2-1)$，

又 $|m|\geq 1$，$|n|\geq 1$，即 $m^2\geq 1$ 且 $n^2\geq 1$，所以 $(m^2-1)(n^2-1)\geq 0$，

因此 $|mn-1|\geq|m-n|$，又 $f(mn)=|mn-1|$，

于是 $f(mn)\geq|m-n|\geq f(m)-f(n)$. ………………………………… (10分)

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。