

衡阳市八中 2024 届高三第 2 次月考

数学试题

命题人：刘瑶 审题人：颜军

注意事项：本试卷满分为 150 分，时量为 120 分钟

一、单选题（本大题共 8 小题，每题 5 分，共 40 分）

1. 若集合 $A = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x | x^2 < 1\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{x | 0 \leq x < 1\}$ B. $\{x | 1 < x \leq 2\}$ C. $\{x | 0 < x \leq 2\}$ D. $\{x | x \geq 0 \text{ 或 } x < -1\}$

2. 在复平面内, 复数 $\frac{1-2i}{2+i}$ 对应的点的坐标为 ()

- A. $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ B. $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ C. $(0, -1)$ D. $(0, 1)$

3. 定义在 \mathbf{R} 上的偶函数 $f(x)$ 满足: 对任意的 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$), 有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$, 则 ()

- A. $f(1) < f(-2) < f(3)$ B. $f(-2) < f(1) < f(3)$ C. $f(3) < f(1) < f(-2)$ D. $f(3) < f(-2) < f(1)$

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 前 n 项和为 S_n , 则“ $d > 0$ ”是“ $S_{3n} - S_{2n} > S_{2n} - S_n$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 某校高三有 1000 人参加考试, 统计发现数学成绩近似服从正态分布 $N(105, \sigma^2)$, 且成绩优良 (不低于 120 分) 的人数为 360, 则此次考试数学成绩及格 (不低于 90 分) 的人数约为 ()

- A. 360 B. 640 C. 720 D. 780

6. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > \sqrt{3})$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , A 为上顶点, 若 $\triangle AF_1F_2$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 则 $\triangle AF_1F_2$ 的周长为 ()

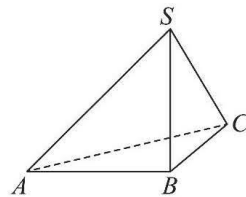
- A. 8 B. 7 C. 6 D. 5

7. 设函数 $f(x) = (ax - m e^x)(ax - \ln x)$ (其中 e 为自然对数的底数), 若存在实数 a 使得 $f(x) < 0$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(\frac{1}{e^2}, +\infty)$ B. $(\frac{1}{e}, +\infty)$ C. $(e^2, +\infty)$ D. $(-\infty, \frac{1}{e^2})$

8. 如图, 在三棱锥 $S-ABC$ 中, $SA = SC = AC = 2\sqrt{2}, AB = BC = 2$, 二面角 $S-AC-B$ 的正切值是 $\sqrt{2}$, 则三棱锥 $S-ABC$ 外接球的表面积是 ()

- A. 12π B. 4π C. $4\sqrt{3}\pi$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$



二、多选题（本大题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分）

试卷第 1 页，共 4 页

9. 已知向量 $\vec{a}=(1,3), \vec{b}=(2,-4)$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $(\vec{a}+\vec{b}) \perp \vec{a}$ B. $|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{10}$ C. 向量 \vec{a}, \vec{b} 的夹角为 $\frac{3\pi}{4}$ D. \vec{b} 在 \vec{a} 方向上的投影向量是 $\sqrt{10}\vec{a}$

10. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 前 n 项积为 T_n , 若满足 $0 < a_1 < 1, a_7 \cdot a_{4040} > 1, (a_{2023}-1)(a_{2024}-1) < 0$, 则下列选项正确的是 ()

- A. $\{a_n\}$ 为递减数列 B. $S_{2023}+1 < S_{2024}$
C. 当 $n=2023$ 时, T_n 最小 D. 当 $T_n > 1$ 时, n 的最小值为 4047

11. 已知函数 $f(x)=\cos 2x+2|\sin x|$, 则 ()

- A. 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增 B. 直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴
C. 函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ D. 方程 $f(x)=a(x \in (0, 2\pi))$ 最多有 8 个根, 且这些根之和为 8π

12. 已知直线 $l: y=k(x+2)$ 交 y 轴于点 P , 圆 $M:(x-2)^2+y^2=1$, 过点 P 作圆 M 的两条切线, 切点分别为 A, B , 直线 AB 与 MP 交于点 C , 则 ()

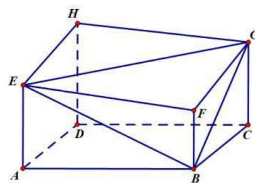
- A. 若直线 l 与圆 M 相切, 则 $k=\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$ B. 当 $k=2$ 时, 四边形 $PAMB$ 的面积为 $2\sqrt{19}$
C. 直线 AB 经过一定点 D. 已知点 $Q\left(\frac{7}{4}, 0\right)$, 则 $|CQ|$ 为定值

三、填空题 (本大题共 4 题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 在数学中, 有一个被称为自然常数 (又叫欧拉数) 的常数 $e \approx 2.71828$. 小明在设置银行卡的数字密码时, 打算将自然常数的前 6 位数字 2, 7, 1, 8, 2, 8 进行某种排列得到密码. 如果排列时要求两个 2 相邻, 两个 8 不相邻, 那么小明可以设置的不同密码共有 _____ 个.

14. 曲线 $f(x)=(x+a)e^x$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线与直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 垂直, 则 $a=_____$.

15. 底面 $ABCD$ 为菱形且侧棱 $AE \perp$ 底面 $ABCD$ 的四棱柱被一平面截取后得到如图所示的几何体. 若 $DA=DH=DB=4, AE=CG=3$. 则三棱锥 $F-BEG$ 的体积为 _____



16. 设 $a > 0$, 平行于 x 轴的直线 $l: y=a$ 分别与函数 $y=2^x$ 和 $y=2^{x+1}$ 的图像交于点 A, B , 若函数 $y=2^x$ 的图像上存在点 C , 满足 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 则 $a=_____$.

四、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分)

17. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -1$ 且 $c > b$.

(1)求角 A 的大小;

(2)设 M 为 BC 的中点, 且 $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 a 的长度.

18. 某工艺品加工厂加工某工艺品需要经过 a, b, c 三道工序, 且每道工序的加工都相互独立, 三道工序加工合格率分别为 $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. 三道工序都合格的工艺品为特等品; 恰有两道工序合格的工艺品为一等品; 恰有一道工序合格的工艺品为二等品; 其余为废品.

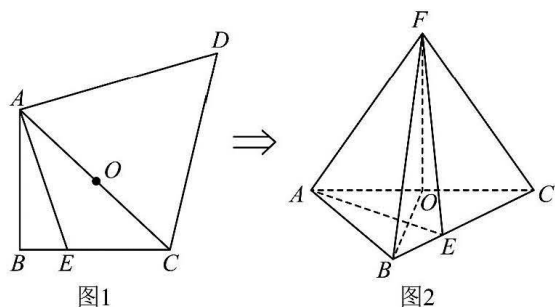
(1)求加工一件工艺品不是废品的概率;

(2)若每个工艺品为特等品可获利300元, 一等品可获利100元, 二等品将使工厂亏损20元, 废品将使工厂亏损100元, 记一件工艺品经过三道工序后最终获利 X 元, 求 X 的分布列和数学期望.

19. 在图1中, $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 2\sqrt{2}$, $\triangle ACD$ 为等边三角形, O 为 AC 边的中点, E 在 BC 边上, 且 $EC = 2BE$, 沿 AC 将 $\triangle ACD$ 进行折叠, 使点 D 运动到点 F 的位置, 如图2, 连接 FO, FB, FE , 使得 $FB = 4$.

(1)证明: $FO \perp$ 平面 ABC .

(2)求二面角 $E-FA-C$ 的余弦值.



20. 若数列 $\{A_n\}$ 满足 $A_{n+1} = A_n^2$, 则称数列 $\{A_n\}$ 为“平方递推数列”. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 9$, 点 (a_n, a_{n+1}) 在函数 $f(x) = x^2 + 2x$ 的图象上, 其中 n 为正整数,

(1)证明: 数列 $\{a_n + 1\}$ 是“平方递推数列”, 且数列 $\{\lg(a_n + 1)\}$ 为等比数列;

(2)设 $b_n = \lg(a_n + 1), c_n = 2n + 4$, 定义 $a * b = \begin{cases} a, & a \leq b, \\ b, & a > b, \end{cases}$ 且记 $d_n = b_n * c_n$, 求数列 $\{d_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

21. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点, 右顶点分别为 F, A , $B(0, b)$, $|AF| = 1$, 点 M 在线段 AB 上,

且满足 $|BM| = \sqrt{3}|MA|$, 直线 OM 的斜率为 1, O 为坐标原点.

(1) 求双曲线 C 的方程.

(2) 过点 F 的直线 l 与双曲线 C 的右支相交于 P, Q 两点, 在 x 轴上是否存在与 F 不同的定点 E , 使得

$|EP| \cdot |FQ| = |EQ| \cdot |FP|$ 恒成立? 若存在, 求出点 E 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

22. 已知函数 $f(x) = \ln x - a \left(x - \frac{1}{x} \right)$, $a > 0$.

(1) 讨论 $f(x)$ 极值点的个数;

(2) 若 $f(x)$ 恰有三个零点 $t_1, t_2, t_3 (t_1 < t_2 < t_3)$ 和两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$.

(i) 证明: $f(x_1) + f(x_2) = 0$;

(ii) 若 $m < n$, 且 $m \ln m = n \ln n$, 证明: $\frac{(1-m)e^{-m}}{t_1 t_2 t_3} > n(\ln n + 1)$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

