

华南师大附中 2023 届高三月考（二）

数学参考答案

一、单项选择题：

1. D 2. C 3. A 4. C 5. A 6. B 7. C 8. A

二、多项选择题：

9. BD 10. BCD 11. BCD 12. ACD

11. 【答案】BCD

【详解】易得 $a_n + b_n = 3^{n-1}$, $a_{n+1} = 2a_n + b_n$, $b_{n+1} = 2b_n + a_n$, 且有 $a_1 = 1, b_1 = 0$,

$$\text{故有} \begin{cases} a_{n+1} + b_{n+1} = 3(a_n + b_n) \\ a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - b_n \end{cases}, \text{故} \begin{cases} a_n + b_n = 3^{n-1} \\ a_n - b_n = 1 \end{cases}$$

$$\text{故} \begin{cases} a_n = \frac{3^{n-1} + 1}{2} \\ b_n = \frac{3^{n-1} - 1}{2} \end{cases}, \text{进而易判断 BCD 正确, A 错误. 故选: BCD.}$$

12. 【答案】ACD

【详解】对于 A, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, 则 $K(x) = \frac{|6x|}{[1 + (3x^2)^2]^{1.5}}$,

又 $K(x) = K(-x)$, 所以 $K(x)$ 为偶函数, 曲线在两点的弯曲长度相同, 故 A 正确;

对于 B, 设 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, $f'(x) = 2ax + b$, $f''(x) = 2a$,

$$\text{则} K(x) = \frac{|2a|}{[1 + (2ax + b)^2]^{1.5}}, \text{当且仅当 } 2ax + b = 0,$$

即 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, 曲率取得最大值, 故 B 错误;

对于 C, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$,

$$K(x) = \frac{|-\sin x|}{(1 + \cos^2 x)^{1.5}} = \frac{t}{(2 - t^2)^{1.5}} (t = |\sin x| \in [0, 1]),$$

当 $t = 0$ 时, $K(x) = 0$; 当 $0 < t \leq 1$ 时, 函数 $p(t) = \frac{t}{(2 - t^2)^{1.5}}$ 为增函数,

所以 $p(t)$ 的最大值为 $p(1) = 1$, 故 C 正确;

对于 D, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$,

$$K(x) = \frac{\frac{2}{x^3}}{\left(1 + \frac{1}{x^4}\right)^{1.5}} = \frac{2}{\sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3}} \leq \frac{2}{\sqrt{\left(2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}}\right)^3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

当且仅当 $x=1$ 时, 等号成立, 故 D 正确. 故选 ACD.

三、填空题:

13. $\sqrt{10}$

14. $\frac{7\sqrt{2}}{9}$

15. x^2 (答案不唯一)

16. $[-4, -2]$

16. 【详解】在等比数列 $\{b_n\}$ 中, 由 $b_1 \cdot b_4 = 8 \Rightarrow b_2 \cdot b_3 = 8$, 又 $b_2 + b_3 = 6$, 且公比小于 1,

$$\therefore b_2 = 4, b_3 = 2, \therefore q = \frac{b_3}{b_2} = \frac{1}{2}, \text{ 因此 } b_n = b_2 q^{n-2} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}.$$

$$\text{由 } c_n = \frac{a_n + b_n}{2} + \frac{|a_n - b_n|}{2}, \text{ 得到 } c_n = \begin{cases} b_n (a_n \leq b_n) \\ a_n (a_n > b_n) \end{cases} \therefore \{c_n\} \text{ 是取 } a_n, b_n \text{ 中最大值.}$$

$\therefore c_4 \leq c_n (n \in \mathbb{N}^*)$, $\therefore c_4$ 是数列 $\{c_n\}$ 中的最小项,

$$\text{又 } b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} \text{ 单调递减, } a_n = n+t \text{ 单调递增,}$$

$\therefore$ 当 $c_4 = a_4$ 时, $c_4 \leq c_n$, 即 $a_4 \leq c_n$, $\therefore a_4$ 是数列 $\{c_n\}$ 中的最小项, 则必须满足 $b_4 < a_4 \leq b_5$,

$$\text{即得 } \left(\frac{1}{2}\right)^{4-4} < 4+t \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{5-4} \Rightarrow -3 < t \leq -2.$$

当 $c_4 = b_4$ 时, $c_4 \leq c_n$, 即 $b_4 \leq c_n$, $\therefore b_4$ 是数列 $\{c_n\}$ 中的最小项, 则必须满足 $a_4 \leq b_4 \leq a_5$,

$$\text{即得 } 4+t \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{4-4} \leq 5+t \Rightarrow -4 \leq t \leq -3, \text{ 综上所述, 实数 } t \text{ 的取值范围是 } [-4, -2], \text{ 故答案}$$

为 $[-4, -2]$.

四、解答题:

17. (1) 由 $\frac{2\cos B + \cos A}{2\sin B - \sin A} = \tan A$ 得 $\frac{2\cos B + \cos A}{2\sin B - \sin A} = \frac{\sin A}{\cos A}$, (1 分)

$$\text{即 } 2\cos B \cos A + \cos^2 A = 2\sin B \sin A - \sin^2 A,$$

$$\therefore 2(\cos B \cos A - \sin B \sin A) = -\cos^2 A - \sin^2 A,$$

$$\therefore \cos(B+A) = -\frac{1}{2}, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\because A+B \in (0, \pi), \therefore A+B = \frac{2\pi}{3}, \quad (4 \text{ 分})$$

$$\therefore C = \frac{\pi}{3}. \quad (5 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 由 } a=6, \quad C=\frac{\pi}{3}, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = 3\sqrt{3},$$

解得 $b=2$, (7 分)

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 36 + 4 - 2 \times 6 \times 2 \times \frac{1}{2} = 28, \therefore c = 2\sqrt{7}. \quad (10 \text{ 分})$$

18. 解: (1) $a_{n+1} = 2S_n + 2$, (1)

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = 2S_{n-1} + 2$, (2) (1 分)

$$(1)-(2) \text{ 得 } a_{n+1} - a_n = 2(S_n - S_{n-1}) = 2a_n, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\therefore a_{n+1} = 3a_n (n \geq 2), \therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\because a_1 = 2, \therefore a_2 = 2S_1 + 2 = 6, \therefore \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{2} = 3 \text{ 也满足上式}, \quad (4 \text{ 分})$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列且首项为 2, 公比为 3,

$$\therefore a_n = a_1 \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}.$$

即 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2 \times 3^{n-1}$ (5 分)

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } a_n = 2 \times 3^{n-1}, \text{ 所以 } b_n = \frac{2n}{3a_n} = \frac{n}{3^n}, \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{令 } T_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n-1}{3^{n-1}} + \frac{n}{3^n}, \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{得 } \frac{1}{3}T_n = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{n-1}{3^n} + \frac{n}{3^{n+1}}, \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{①-② 得 } \frac{2}{3}T_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}} \quad (9 \text{ 分})$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^{n+1}} \quad (10 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - \frac{n}{3^{n+1}} \quad (11 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \times 3^n} \quad (12 \text{ 分})$$

19. 解: (1) $m < n$; (1 分)

(2) 设“从抽取的 20 位客户中随机抽取 2 位，至少有 1 位是 A 组的客户”为事件 M ，则

$$P(M) = \frac{C_{10}^1 C_{10}^1 + C_{10}^2}{C_{20}^2} = \frac{29}{38},$$

所以从抽取的 20 位客户中随机抽取 2 位，至少有 1 位是 A 组的客户的概率是 $\frac{29}{38}$ ；(4 分)

(3) 题图，知 A 组“驾驶达人”的人数为 1 人，B 组“驾驶达人”的人数为 2 人，(5 分)

则可估计该市使用这种电动汽车的所有客户中，在年龄 40 岁以下的客户中随机抽取 1 位，

该客户为“驾驶达人”的概率为 $\frac{1}{10}$ ，在年龄 40 岁以上的客户中随机抽取 1 位，该客户为“驾驶

达人”的概率为 $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ ；(6 分)

依题意， X 所有可能取值为 0, 1, 2 (7 分)

$$\text{则 } P(X=0) = \left(1 - \frac{1}{10}\right) \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{18}{25}, \text{ (8 分)}$$

$$P(X=1) = \left(1 - \frac{1}{10}\right) \times \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{13}{50}, \text{ (9 分)}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{50}, \text{ (10 分)}$$

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{18}{25}$	$\frac{13}{50}$	$\frac{1}{50}$

(11 分)

$$\text{故 } X \text{ 数学期望为 } E(X) = 0 \times \frac{18}{25} + 1 \times \frac{13}{50} + 2 \times \frac{1}{50} = \frac{3}{10}. \text{ (12 分)}$$

20. 解：(1) 法一：取 BC 、 AC 的中点 M 、 N ，连接 AM 、 MN 、 A_1M 、 A_1N

$\because AB=AC$ 且 M 为 BC 的中点，则 $AM \perp BC$ (1 分)

又 $\because AA_1 \perp BC$ ， $AM \cap AA_1 = A$ ，且 $AM, AA_1 \subset$ 平面 AA_1M

$\therefore BC \perp$ 平面 AA_1M (2 分)

$\because A_1M \subset$ 平面 AA_1M ， $\therefore A_1M \perp BC$ (3 分)

由题意可得 $BB_1 \perp BC$ ，则 $BC = \sqrt{B_1C^2 - BB_1^2} = 2$

$\therefore BC^2 = AC^2 + AB^2$ ，则 $AB \perp AC$

$\because MN \parallel AB$ ，则 $MN \perp AC$ (4 分)

又 $\because \triangle AA_1C$ 为等边三角形且 N 为 AC 的中点，则 $A_1N \perp AC$

$MN \cap A_1N = N$ ，且 $MN, A_1N \subset$ 平面 A_1MN

$\therefore AC \perp \text{平面 } A_1MN$

$\because A_1M \subset \text{平面 } A_1MN$, 则 $A_1M \perp AC$ (5 分)

又 $AC \cap BC = C$, 且 $AC, BC \subset \text{平面 } ABC$

$\therefore A_1M \perp \text{平面 } ABC$ 即 A_1 在底面 ABC 上的射影是线段 BC 中点 M (6 分)

法二: 取 BC 的中点 M , 连接 AM, A_1M

由 $AB=AC$ 得 $AM \perp BC$ (1 分)

又由 $A_1A \perp BC$, $A_1A \cap AM = A$ 得 $BC \perp \text{平面 } A_1AM$ (2 分)

因为 $A_1M \subset \text{平面 } A_1AM$, 所以 $BC \perp A_1M$ (3 分)

由于 $BB_1 \parallel AA_1$, $AA_1 \perp BC$ 得 $BB_1 \perp BC$

在 $Rt\triangle BB_1C$ 中, $BC = \sqrt{B_1C^2 - B_1B^2} = \sqrt{6-2} = 2$, $MC = \frac{1}{2}BC = 1$

在 $Rt\triangle A_1MC$ 中, $A_1M = \sqrt{A_1C^2 - MC^2} = \sqrt{2-1} = 1$, (4 分)

同理 $AM = 1$

在 $\triangle A_1AM$ 中, $A_1M^2 + AM^2 = 2 = A_1A^2$, 因此 $A_1M \perp AM$ (5 分)

又由于 $AM \cap BC = M$, 所以 $A_1M \perp \text{平面 } ABC$ 即 A_1 在底面 ABC 上的射影是线段 BC 中点 M (6 分)

(2) 如图, 以 M 为坐标原点, 以 MC, MA, MA_1 所在的直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, (7 分)

则 $A_1(0,0,1), A(0,1,0), B(-1,0,0), C(1,0,0)$, $\therefore \overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{BA} = (1,1,0), \overrightarrow{CA_1} = (-1,0,1)$ (8 分)

设平面 A_1B_1C 的法向量 $\vec{m} = (x, y, z)$, 则

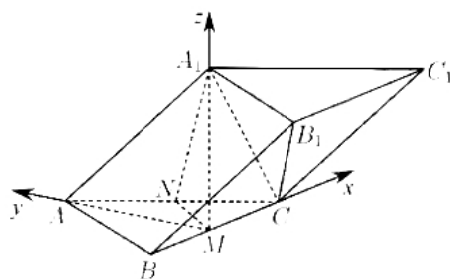
$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{B_1A_1} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{CA_1} = 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

令 $x=1$, 则 $y=-1, z=1$, 即 $\vec{m} = (1, -1, 1)$ (9 分)

平面 A_1B_1C 的法向量 $\vec{n} = (0, 0, 1)$ (10 分)

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (11 \text{ 分})$$

即平面 A_1B_1C 与平面 $A_1B_1C_1$ 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (12 分)



21. 解: (1) 由 $A(2,0)$, $B(0,1)$ 是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个顶点,

得 $a=2$, $b=1$, 即 $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; (3 分)

(2) 当直线 l 的斜率不存在时, 直线 l 与椭圆有且只有一个公共点, 不成立, (4 分)

所以设 $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$, $M(x_3, y_3)$, 直线 l 的斜率为 k ,

$$\text{则 } |PC| = |x_P - x_1| \sqrt{1+k^2} = (2-x_1) \sqrt{1+k^2},$$

$$\text{同理 } |PD| = (2-x_2) \sqrt{1+k^2}, \quad |PM| = (2-x_3) \sqrt{1+k^2},$$

$$\text{则 } \frac{|PM|}{|PC|} + \frac{|PM|}{|PD|} = \frac{2-x_3}{2-x_1} + \frac{2-x_3}{2-x_2} \quad (5 \text{ 分})$$

$$\text{设 } l: y-1=k(x-2), \text{ 而 } AB: \frac{x}{2} + y = 1, \text{ 联立解得 } x_3 = \frac{4k}{2k+1},$$

$$\text{所以 } 2-x_3 = 2 - \frac{4k}{2k+1} = \frac{2}{2k+1} \quad (6 \text{ 分})$$

联立直线 l 与椭圆 E 方程, 消去 y 得: $(4k^2+1)x^2 - 8k(2k-1)x + 16k^2 - 16k = 0$, (7 分)

$$\Delta = [8k(2k-1)]^2 - 4(4k^2+1)(16k^2-16k) > 0 \text{ 解得 } k > 0$$

$$\text{所以 } x_1+x_2 = \frac{8k(2k-1)}{4k^2+1}, \quad x_1x_2 = \frac{16k^2-16k}{4k^2+1}, \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2-x_1} + \frac{1}{2-x_2} = -\frac{x_1+x_2-4}{(x_1-2)(x_2-2)} = -\frac{x_1+x_2-4}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4} \quad (9 \text{ 分})$$

$$= -\frac{\frac{8k(2k-1)}{4k^2+1} - 4}{\frac{16k^2-16k}{4k^2+1} - 2 \times \frac{8k(2k-1)}{4k^2+1} + 4} = 2k+1, \quad (11 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \frac{2-x_3}{2-x_1} + \frac{2-x_3}{2-x_2} = \frac{2}{2k+1} \times (2k+1) = 2, \text{ 即 } \frac{|PM|}{|PC|} + \frac{|PM|}{|PD|} = 2. \quad (12 \text{ 分})$$

22. 解: (1) $F(x) = \frac{g(x)}{x} = \frac{\ln x + n}{x}$, 定义域为 $(0, +\infty)$,

$$F'(x) = \frac{1 - \ln x - n}{x^2}, \quad (1 \text{ 分})$$

当 $0 < x < e^{1-n}$ 时, $F'(x) > 0$, 当 $x > e^{1-n}$ 时, $F'(x) < 0$,

所以 $F(x)$ 在 $x = e^{1-n}$ 处取得极大值, 也是最大值, (2 分)

$$\text{所以 } F(x) = \frac{1-n+n}{e^{1-n}} = \frac{1}{e^2}, \text{ 解得: } n = -1; \quad (3 \text{ 分})$$

$$(2) \frac{me^{x-1}}{e^2} > x(\ln x - 1), \text{ 即 } me^{x-3} > x(\ln x - 1), m > \frac{x(\ln x - 1)}{e^{x-3}}, (4 \text{ 分})$$

$$\text{令 } h(x) = \frac{x(\ln x - 1)}{e^{x-3}}, \text{ 定义域为 } (0, +\infty),$$

$$h'(x) = \frac{\ln x - x \ln x + x}{e^{x-3}}, (5 \text{ 分})$$

$$\text{令 } \varphi(x) = \ln x - x \ln x + x, \quad x > 0, \text{ 则 } \varphi'(x) = \frac{1}{x} - \ln x - 1 + 1 = \frac{1}{x} - \ln x,$$

$$\text{可以看出 } \varphi'(x) = \frac{1}{x} - \ln x \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 单调递减, } (6 \text{ 分})$$

$$\text{又 } \varphi'(1) = 1 > 0, \quad \varphi'(2) = \frac{1}{2} - \ln 2 < 0,$$

$$\text{由零点存在性定理可知: } \exists x_0 \in (1, 2), \text{ 使得 } \varphi'(x_0) = 0, \text{ 即 } \frac{1}{x_0} = \ln x_0, (7 \text{ 分})$$

$$\text{当 } x \in (0, x_0) \text{ 时, } \varphi'(x) > 0, \text{ 当 } x \in (x_0, +\infty) \text{ 时, } \varphi'(x) < 0,$$

$$\varphi(x) \text{ 在 } x = x_0 \text{ 处取得极大值, 也是最大值,}$$

$$\varphi(x)_{\max} = \varphi(x_0) = \ln x_0 - x_0 \ln x_0 + x_0 = \frac{1}{x_0} - 1 + x_0 > 2\sqrt{\frac{1}{x_0} \cdot x_0} - 1 = 1, (8 \text{ 分})$$

$$\varphi\left(\frac{1}{e}\right) = -1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{2}{e} - 1 < 0, \quad \varphi\left(\frac{7}{2}\right) = \ln \frac{7}{2} - \frac{7}{2} \ln \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = \frac{7}{2} - \frac{5}{2} \ln \frac{7}{2} = \frac{1}{2} \left(7 - 5 \ln \frac{7}{2}\right) > 0,$$

$$\varphi(4) = 4 - 6 \ln 2 < 0,$$

$$\text{故存在 } x_1 \in \left(\frac{1}{e}, x_0\right), \quad x_2 \in \left(\frac{7}{2}, 4\right), \text{ 使得 } \varphi(x_1) = 0, \varphi(x_2) = 0, (9 \text{ 分})$$

$$\text{所以当 } x \in (x_1, x_2) \text{ 时, } \varphi(x) > 0, \text{ 当 } x \in (0, x_1) \cup (x_2, +\infty) \text{ 时, } \varphi(x) < 0,$$

$$\text{所以 } h'(x) = \frac{\ln x - x \ln x + x}{e^{x-3}} \text{ 在 } x \in (x_1, x_2) \text{ 上大于 } 0, \text{ 在 } x \in (0, x_1) \cup (x_2, +\infty) \text{ 上小于 } 0,$$

$$\text{所以 } h(x) = \frac{x(\ln x - 1)}{e^{x-3}} \text{ 在 } x \in (x_1, x_2) \text{ 单调递增, 在 } (0, x_1), (x_2, +\infty) \text{ 上单调递减,}$$

$$\text{且当 } x < e \text{ 时, } h(x) = \frac{x(\ln x - 1)}{e^{x-3}} < 0 \text{ 恒成立, } (10 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } h(x) = \frac{x(\ln x - 1)}{e^{x-3}} \text{ 在 } x = x_2 \text{ 处取得极大值, 也是最大值, 其中 } \ln x_2 - x_2 \ln x_2 + x_2 = 0,$$

$$h(x_2) = \frac{x_2(\ln x_2 - 1)}{e^{x_2-3}} = \frac{\ln x_2}{e^{x_2-3}}, \quad x_2 \in \left(\frac{7}{2}, 4\right) (11 \text{ 分})$$

$$\text{令 } \phi(x) = \frac{\ln x}{e^{x-3}}, \quad x \in \left(\frac{7}{2}, 4\right),$$

$$\phi'(x) = \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{e^{x-3}}, \quad \text{当 } x \in \left(\frac{7}{2}, 4\right) \text{ 时, } \phi'(x) = \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{e^{x-3}} < 0,$$

$$\text{故 } \phi(x) < \frac{\ln \frac{7}{2}}{e^{\frac{7}{2}-3}} < 1, \text{ 所以实数 } m \text{ 的最小整数值为 } 1. (12 \text{ 分})$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

