2019—2020 学年度高三年级理数下八调答案

1.【答案】C

【命题意图】本题考查一元二次不等式的解法、集合的运算，考查运算求解能力以及化归与转化思想.

【解析】依题意，$N=\{x|x(2x-7)\leqslant 0\}=\left\{x\middle|0\leqslant x\leqslant\frac{7}{2}\right\}$，故 $M\cup N=\left(-1,\frac{7}{2}\right]$，故选 C.

2.【答案】D

【命题意图】本题考查复数的概念、复数的几何意义，考查推理论证能力以及函数与方程思想.

【解析】依题意，$z=a+bi$，由 $|z-3|=2$，可得 $(a-3)^2+b^2=4(*)$，可知 $M(4,1)$ 不满足 $(*)$ 式，故选 D.

3.D

4.【答案】B

【命题意图】本题考查推理与证明，考查推理论证能力以及分类讨论思想.

【解析】依题意，三个人制作的所有情况如下所示：

	1	2	3	4	5	6
鸿福齐天	小明	小明	小红	小红	小金	小金
国富民强	小红	小金	小金	小明	小红	小明
兴国之路	小金	小红	小明	小金	小明	小红

若小明的说法正确，则均不满足；若小红的说法正确，则 4 满足；若小金的说法正确，则 3 满足. 故“鸿福齐天”的制作者是小红，故选 B.

5.B

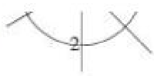
6.【答案】B

【命题意图】本题考查排列组合、数学文化，考查数学建模能力以及分类讨论思想.

【解析】若按照 3∶1∶1 进行分配，则有 $C_3^1A_3^3=18$ 种不同的方案；若按照 2∶2∶1 进行分配，则有 $C_3^2A_3^3=18$ 种不同的方案. 故共有 36 种不同的派遣方案，故选 B.

7.

A　由题可知，$f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，且 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，由 $f(x)$ 的图象特征可得 $-1\leqslant ax+2\leqslant 1$ 在 $[1,2]$ 上恒成立，得 $-\frac{3}{x}\leqslant a\leqslant -\frac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上恒成立，



所以 $-\frac{3}{2}\leqslant a\leqslant -1$.

8.

. B　因为 O 为 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心，所以 $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{CO}|\cdot|\overrightarrow{CA}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CA}\rangle=|\overrightarrow{CA}|\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{CA}|=$

$\frac{1}{2}|\overrightarrow{CA}|^2=18$，同理 $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CB}=32$.

因为 $\tan\angle ACB=\sqrt{7}$，所以 $\cos\angle ACB=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CA}=m\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}+n\overrightarrow{CA}^2=12\sqrt{2}m+36n=18,\\ \overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CB}=m\overrightarrow{CB}^2+n\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=64m+12\sqrt{2}n=32,\end{cases}$

即 $\begin{cases}2\sqrt{2}m+6n=3,\\ 16m+3\sqrt{2}n=8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\frac{16-3\sqrt{2}}{28},\\ n=\frac{12-4\sqrt{2}}{21},\end{cases}$ 故 $m-n=\frac{\sqrt{2}}{12}$.

9.

【答案】C

【命题意图】本题考查三角函数的性质，考查推理论证能力以及分类讨论思想.

【解析】因为 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=4\left|\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{7\pi}{12}\right)\right|+4\left|\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{7\pi}{12}\right)\right|=4\left|\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{12}\right)\right|+4\left|\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{12}\right)\right|\neq f(x)$，故①错误；当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$ 时，$\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{7\pi}{12},\frac{17\pi}{24}\right]$，故 $f(x)=4\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)-4\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)=4\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{12}\right)$，可知函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上单调递增，故②正确；函数 $f(x)=4\left|\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)\right|+4\left|\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)\right|$ 的值域等价于函数 $g(x)=4\left|\sin\frac{1}{2}x\right|+4\left|\cos\frac{1}{2}x\right|$ 的值域，易知 $g(x+\pi)=g(x)$，故当 $x\in[0,\pi]$ 时，$g(x)=4\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)\in[4,4\sqrt{2}]$，故③正确. 综上所述，故选 C.

10.B.

11. B 根据所给条件，结合 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$，代入后展开化简，构造数列 $\left\{\frac{1}{S_n-1}\right\}$，由等差数列性质可知 $\left\{\frac{1}{S_n-1}\right\}$ 为等差数列，进而由首项与公差求得 S_n.将不等式化简可得，

$k\le\left(\frac{(S_1+1)(S_2+1)\cdots(S_n+1)}{n}\right)_{min}$，代入后构造函数 $f(n)=\frac{(S_1+1)(S_2+1)\cdots(S_n+1)}{n}$，并求得 $\frac{f(n+1)}{f(n)}$ 后可证明函数 $f(n)$ 为单调递增数列，求得 $f(n)_{\min}$，即可确定 k 的最大整数值.

【详解】

当 $n\ge1$ 时，由条件 $a_{n+1}S_n+(S_n-1)^2=0,(n\in N^*)$，

可得 $S_{n+1}-S_n=-\frac{(S_n-1)^2}{S_n}$，整理得 $S_{n+1}S_n-S_n^{\ 2}=-(S_n^{\ 2}-2S_n+1)$，

化简得：$S_nS_{n+1}=2S_n-1$，

从而 $S_{n+1}-1=-\frac{S_n-1}{S_n}$，故 $\frac{1}{S_{n+1}-1}-\frac{1}{S_n-1}=1$，

由于 $\frac{1}{S_1-1}=1$，所以数列 $\left\{\frac{1}{S_n-1}\right\}$ 是以 $\frac{1}{S_1-1}=1$ 为首项，1 为公差的等差数列，

则 $\frac{1}{S_n-1}=n$，整理得 $S_n=\frac{n+1}{n}$，

依题只须$k \le \left(\frac{(S_1+1)(S_2+1)\cdots(S_n+1)}{n}\right)_{min}$，令$f(n)=\frac{(S_1+1)(S_2+1)\cdots(S_n+1)}{n}$，

则$\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{n(S_{n+1}+1)}{n+1}=\frac{n(2n+3)}{(n+1)^2}>1$，所以$f(n)$为单调递增数列，

故$f(n)_{min}=f(1)=\frac{S_1+1}{1}=3$，$\therefore k_{max}=3$，

故选：B.

12.【答案】A

【命题意图】本题考查组合体、球，考查空间想象能力以及数形结合思想.

【解析】依题意，$\angle MBC=\frac{\pi}{3}$，取BC的中点E，则E是等腰梯形$ABCD$外接圆的圆心，F是$\triangle SAD$的外心，作$OE\perp$平面$ABCD$，$OF\perp$平面SAB，则O是四棱锥$S\text{-}ABCD$的外接球球心，且$OF=DE=3$，$AF=2$，设四棱锥$S\text{-}ABCD$的外接球半径为R，则$R^2=SF^2+OF^2=13$，则$OE=DF=1$，故当四棱锥$S\text{-}ABCD$的体积最大时，$d_{max}=R+OE=\sqrt{13}+1$，故选A.

二、填空题

13.【答案】$-\frac{1}{3}$

【命题意图】本题考查导数的几何意义，考查运算求解能力以及数形结合思想.

【解析】依题意，$f'(x)=6m(2x+1)^2-2e^x$，$f'(0)=6m-2$，则$6m-2=-4$，解得$m=-\frac{1}{3}$.

14.【答案】$\frac{7}{3}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$

【命题意图】本题考查数列的前n项和与通项公式的关系，考查运算求解能力以及化归与转化思想.

【解析】当$n=1$时，$2S_1=5a_1-7=2a_1$，即$a_1=\frac{7}{3}$；当$n\geqslant 2$时，$2S_n=5a_n-7$，$2S_{n-1}=5a_{n-1}-7$，两式相减可得$2a_n=5a_n-5a_{n-1}$，即$5a_{n-1}=3a_n$，即$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{5}{3}$，故数列$\{a_n\}$是以$\frac{7}{3}$为首项，$\frac{5}{3}$为公比的等比数列，故$a_n=\frac{7}{3}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$.

15. 2， 40

16.【答案】$\sqrt{5}-1$

【解析】如图，设$\angle MOF_2=\frac{\alpha}{2}$，$|OF_2|=c$，则$\tan\alpha=\frac{b}{a}$，即$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{b}{a}$，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，解得$\sin\alpha=\frac{b}{c}$，$\cos\alpha=\frac{a}{c}$，则$|OM|=c\cos\frac{\alpha}{2}$，故$M\left(c\cos^2\frac{\alpha}{2}, c\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$，即$M\left(\frac{c+a}{2},\frac{b}{2}\right)$，代入双曲线的方程可得$\frac{(c+a)^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4b^2}=1$，解得$e=\sqrt{5}-1$.

17.【命题意图】本题考查正弦定理、余弦定理、三角形的面积公式，考查运算求解能力以及化归与转化思想.

【解析】(1)由正弦定理，得$\frac{3b}{c}+\frac{3c}{b}=\frac{3a^2}{bc}+4\sqrt{2}$，…… 2分

即$3b^2+3c^2=3a^2+4\sqrt{2}bc$，则$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2\sqrt{2}}{3}=\cos A$，…… 4分

而$\sin^2A+\cos^2A=1$，又$A\in(0,\pi)$，解得$\sin A=\frac{1}{3}$，故$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. …… 6分

(2)因为$\sqrt{2}\sin B=3\sin C$，则$b=\frac{3c}{\sqrt{2}}$，…… 7分

因为$S_{\triangle ABC}=2\sqrt{2}$，故$\frac{1}{2}bc\sin A=2\sqrt{2}$，故$\frac{1}{2}\times\frac{3c^2}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{3}=2\sqrt{2}$，解得$c=2\sqrt{2}$，…… 9分

故$b=6$，…… 10分

则$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}=\sqrt{36+8-2\times6\times2\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}}=2\sqrt{3}$. …… 12分

(18)(本小题14分)

解:(Ⅰ)由题意知，所抽取的20人中得分落在组[0,20]的人数有$0.0050\times20\times20=2$(人)，

得分落在组(20,40]的人数有$0.0075\times20\times20=3$(人).

所以所抽取的20人中得分落在组[0,20]的人数有2人，得分落在组(20,40]的人数有3人. …… 4分

(Ⅱ)X的所有可能取值为0,1,2.

$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$,

$P(X=1)=\frac{C_2^1C_3^2}{C_5^3}=\frac{6}{10}$,

$P(X=2)=\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}=\frac{3}{10}$.

所以X的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

所以X的期望$EX=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}=1.2$. …… 10分

(Ⅲ)答案不唯一.

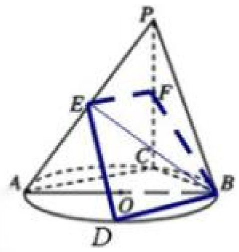
答案示例1:可以认为该选手不会得到100分，理由如下:

该选手获得100分的概率是$(\frac{1}{4})^{20}$，概率非常小，故可以认为该选手不会得到100分.

答案示例2:不能认为该选手不会得到100分，理由如下:

该选手获得100分的概率是$(\frac{1}{4})^{20}$，虽然概率非常小，但是也可能发生，故不能认为该选手不会得到100分. …… 14分

19.（本小题满分 12 分）



解：（Ⅰ）$l//$平面PAC．……………1 分

证明如下：$\because EF//AC$，$AC\subset$平面ABC，$EF\not\subset$平面ABC，

$\therefore EF//$平面ABC．……………2 分

又$EF\subset$平面BEF，平面BEF与平面ABC的交线为l

$\therefore EF//l$．……………3 分

而$l\not\subset$平面PAC，$EF\subset$平面PAC，$\therefore l//$平面PAC．……………………4 分

（Ⅱ）解法一：设直线l与圆O的另一个交点为D，连结DE，FB．

由（Ⅰ）知，$BD//AC$，而$AC\perp BC$，$\therefore BD\perp BC$．

$\because PC\perp$平面ABC，$\therefore PC\perp BD$．而$PC\cap BC=C$，$\therefore BD\perp$平面PBC，

又$\because FB\subset$平面PBC，$\therefore BD\perp BF$，

$\therefore\angle FBC$是二面角$E-l-C$的平面角．……………8 分

$$\tan\angle FBC=\frac{FC}{BC}=\frac{AB}{BC}=\frac{1}{\cos\angle ABC}.$$

注意到$0<\angle ABC<\frac{\pi}{2}$，$\therefore 0<\cos\angle ABC<1$，$\therefore\tan\angle FBC>1$．

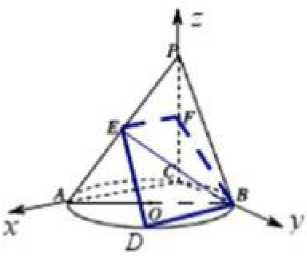
$\because 0<\angle FBC<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\angle FBC\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，

即二面角$E-l-C$的取值范围是$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$．……………12 分

解法二：由题意，$AC\perp BC$，以CA为x轴，CB为y轴，CP为z轴建立空间直角坐标系，

设$AB=2$，$BC=t(0<t<2)$，则$B(0,t,0)$，$F(0,0,2)$，$D(\sqrt{4-t^2},t,0)$，

$\overrightarrow{BF}=(0,-t,2)$，$\overrightarrow{BD}=(\sqrt{4-t^2},0,0)$．……………6 分



设平面DBF的法向量为$\overrightarrow{m}=(x,y,z)$，

则由$\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0\end{cases}$得$\begin{cases}-ty+2z=0\\ \sqrt{4-t^2}x=0\end{cases}$，取$y=2$得$\overrightarrow{m}=(0,2,t)$．

易知平面BCD的法向量$\overrightarrow{n}=(0,0,1)$，……………8 分

设二面角$E-l-C$的大小为θ，易知θ为锐角．

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{m}|\cdot|\overrightarrow{n}|}=\frac{t}{\sqrt{4+t^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{t^2}+1}}\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2}),$$ ……………11 分

$\therefore\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$，即二面角$E-l-C$的取值范围是$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$．……………12 分

20. 解：(1) 设 $F_1(-\sqrt{2},0)$，$F_2(\sqrt{2},0)$，则 $|\boldsymbol{m}|=|(x+\sqrt{2},y)|=\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+y^2}=|PF_1|$，

$|\boldsymbol{n}|=|(x-\sqrt{2},y)|=\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+y^2}=|PF_2|$.

又 $|\boldsymbol{m}|+|\boldsymbol{n}|=4$，$|PF_1|+|PF_2|=4$，…………………………………… 2 分

由椭圆的定义可知 P 的轨迹是以 $F_1(-\sqrt{2},0)$，$F_2(\sqrt{2},0)$ 为焦点，4 为长轴的椭圆.

故 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. …………………………………… 5 分

(2) 由题意可知直线 l 的斜率一定存在，设直线 l 的方程为 $y=kx(k>0)$，

与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 联立可得 $(1+2k^2)x^2=4$，

所以 $x=\frac{\pm2}{\sqrt{2k^2+1}}$，$M(\frac{-2}{\sqrt{2k^2+1}},\frac{-2k}{\sqrt{2k^2+1}})$，$N(\frac{2}{\sqrt{2k^2+1}},\frac{2k}{\sqrt{2k^2+1}})$. …………………… 6 分

点 H 的坐标为 $(\frac{-2}{\sqrt{2k^2+1}},0)$，直线 HN 的方程为 $y=\frac{k}{2}(x+\frac{2}{\sqrt{2k^2+1}})$，

代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，可得 $(\frac{k^2}{2}+1)x^2+\frac{2k^2x}{\sqrt{2k^2+1}}+\frac{-6k^2-4}{2k^2+1}=0$，

所以 $x_Q\cdot x_N=\frac{-6k^2-4}{(\frac{k^2}{2}+1)\cdot(2k^2+1)}$. …………………………………… 7 分

因为 $x_N=\frac{2}{\sqrt{2k^2+1}}$，所以 $x_Q=-\frac{6k^2+4}{(k^2+2)\cdot\sqrt{2k^2+1}}$，

Q 的坐标为 $(-\frac{6k^2+4}{(k^2+2)\cdot\sqrt{2k^2+1}},\frac{-2k^3}{(k^2+2)\cdot\sqrt{2k^2+1}})$，…………………… 8 分

于是 $k_{QM}=-\frac{1}{k}$，所以 $k_{QM}\cdot k_{MN}=-1$，即 $QM\perp MN$. …………………… 9 分

因为 $|MN|=\frac{4\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{2k^2+1}}$，$|QM|=\frac{4k\sqrt{k^2+1}}{(k^2+2)\sqrt{2k^2+1}}$，

所以 $S_{\triangle QMN}=\frac{1}{2}\cdot|QM|\cdot|MN|=\frac{8(k^3+k)}{2k^4+5k^2+2}$. …………………… 10 分

令 $f(k)=\frac{8(k^3+k)}{2k^4+5k^2+2}(k>0)$，$f'(k)=\frac{-8(k+1)(k-1)(2k^4+3k^2+2)}{(2k^4+5k^2+2)^2}$，由 $f'(k)>0$，可得 $0<k<1$，$f(k)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，因此当 $k=1$ 时，函数 $f(k)$ 有最大值，最大值为 $f(1)=\frac{16}{9}$，即 $S_{\triangle QMN}$ 的最大值为 $\frac{16}{9}$. …………………… 12 分

21. (1)解：因为函数 $f(x)$ 的图象恒在 $g(x)$ 的图象的下方，

所以 $f(x)-g(x)=x-\frac{1}{x}-t\ln x<0$ 在区间 $(0,1)$ 上恒成立. …… 1分

设 $F(x)=x-\frac{1}{x}-t\ln x$，其中 $x\in(0,1)$，

所以 $F'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{t}{x}=\frac{x^2-tx+1}{x^2}$，其中 $\Delta=t^2-4$，$t>0$. …… 2分

①当 $t^2-4\leqslant 0$，即 $0<t\leqslant 2$ 时，$F'(x)\geqslant 0$，

所以函数 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，$F(x)<F(1)=0$，

故 $f(x)-g(x)<0$ 成立，满足题意. …… 3分

②当 $t^2-4>0$，即 $t>2$ 时，设 $\theta(x)=x^2-tx+1(0<x<1)$，

则 $\theta(x)$ 图象的对称轴 $x=\frac{t}{2}>1$，$\theta(0)=1$，$\theta(1)=2-t<0$， …… 4分

所以 $\theta(x)$ 在 $(0,1)$ 上存在唯一实根，设为 x_1，则 $x\in(x_1,1)$，$\theta(x)<0$，$F'(x)<0$，

所以 $F(x)$ 在 $(x_1,1)$ 上单调递减，此时 $F(x)>F(1)=0$，不合题意.

综上可得，实数 t 的取值范围是 $(0,2]$. …… 5分

(2)证明：由题意得 $H(x)=e^x\ln x-(x^2-1)(e^x-1+\frac{1}{x})=e^x\ln x-\frac{(x^2-1)(xe^x-x+1)}{x}$，

因为当 $x\in(0,1)$ 时，$xe^x-x+1>0$，$\ln x<0$，

所以 $H(x)>0\Leftrightarrow e^x\ln x>\frac{(x^2-1)(xe^x-x+1)}{x}\Leftrightarrow\frac{e^x}{xe^x-x+1}<\frac{x^2-1}{x\ln x}$. …… 6分

令 $h(x)=e^x-x-1(0<x<1)$，则 $h'(x)=e^x-1>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，$h(x)>h(0)=0$，即 $e^x>x+1$， …… 7分

所以 $xe^x-x+1>x(x+1)-x+1=x^2+1$，从而 $\frac{e^x}{xe^x-x+1}<\frac{e^x}{x^2+1}$. …… 8分

由(1)知当 $t=2$ 时，$x-\frac{1}{x}-2\ln x<0$ 在 $x\in(0,1)$ 上恒成立，整理得 $\frac{x^2-1}{x\ln x}>2$. …… 9分

令 $m(x)=\frac{e^x}{x^2+1}(0<x<1)$，则要证 $H(x)>0$，只需证 $m(x)<2$. …… 10分

因为 $m'(x)=\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}>0$，所以 $m(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增， …… 11分

所以 $m(x)<m(1)=\frac{e}{2}<2$，即 $m(x)<2$ 在 $(0,1)$ 上恒成立.

综上可得，对任意 $x\in(0,1)$，都有 $H(x)>0$ 成立. …… 12分

22. 解：(1)消去参数 t 得 C_1 的直角坐标方程为 $x^2=4y$， ······ 1 分

则 $(\rho\cos\theta)^2=4\rho\sin\theta$， ······ 2 分

即 $\rho=\frac{4\sin\theta}{\cos^2\theta}$，所以 C_1 的极坐标方程为 $\rho=\frac{4\sin\theta}{\cos^2\theta}$. ······ 3 分

由 $\rho=4\sin\theta$，得 $\rho^2=4\rho\sin\theta$， ······ 4 分

则 $x^2+y^2-4y=0$，所以 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-4y=0$. ······ 5 分

(2)将 $\theta=\alpha$ 代入 $\rho=\frac{4\sin\theta}{\cos^2\theta}$，得 P 的极坐标为 $(\frac{4\sin\alpha}{\cos^2\alpha},\alpha)$. ······ 6 分

将 $\theta=\alpha$ 代入 $\rho=4\sin\theta$，得 Q 的极坐标为 $(4\sin\alpha,\alpha)$， ······ 7 分

因为 Q 为 OP 的中点，所以 $\frac{4\sin\alpha}{\cos^2\alpha}=2\times4\sin\alpha$， ······ 8 分

又 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$， ······ 9 分

故 $\alpha=\frac{\pi}{4}$. ······ 10 分

23. 解：(1)当 $x<\frac{1}{2}$ 时，由 $f(x)\geqslant3$，得 $3-3x\geqslant3$，则 $x\leqslant0$； ······ 1 分

当 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant2$ 时，由 $f(x)\geqslant3$，得 $x+1\geqslant3$，又 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant2$，则 $x=2$； ······ 2 分

当 $x>2$ 时，由 $f(x)\geqslant3$，得 $3x-3\geqslant3$，则 $x>2$. ······ 3 分

故不等式 $f(x)\geqslant3$ 的解集为 $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$. ······ 5 分

(2)因为 $f(x)=\begin{cases}3-3x, x<\frac{1}{2},\\ x+1, \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant2,\\ 3x-3, x>2,\end{cases}$ 所以当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $\frac{3}{2}$，故 $\frac{1}{2}a+b+c=\frac{3}{2}$. ······ 7 分

由柯西不等式得 $(a^2+b^2+c^2)[(\frac{1}{2})^2+1^2+1^2]\geqslant(\frac{1}{2}a+b+c)^2$， ······ 8 分

当且仅当 $4a^2=b^2=c^2$，即 $a=\frac{1}{3}$，$b=c=\frac{2}{3}$ 时，等号成立， ······ 9 分

所以 $a^2+b^2+c^2\geqslant1$，故 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值为 1. ······ 9 分

识别二维码，快速关注