2月13日理科数学测试题答案

（本试卷满分150分，考试用时120分钟）

第I卷（选择题)

一、单选题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合$U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,3,4\}$，则集合$A\cap \complement_U B$是(　　)

A．$\{1,3,5,6\}$　　B．$\{1,3,5\}$　　C．$\{1,3\}$　　D．$\{1,5\}$

【答案】D$\because$集合$U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,3,4\}$，则

$\complement_U B=\{1,5,6\}$，

因此，$A\cap \complement_U B=\{1,5\}$.故选：D.

2．已知复数z满足$\bar{z}(1-i)=3+i$（i为虚数单位),则复数$z=$（　　）

A．$1+2i$　　B．$1-2i$　　C．$2+i$　　D．$2-i$

【答案】B由题意$\bar{z}(1-i)=3+i$,可变形为$\bar{z}=\dfrac{3+i}{1-i}=\dfrac{(3+i)(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2+4i}{2}=1+2i$.

则复数$z=1-2i$.故选：B.

3．等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，已知向量$\vec{a}=(a_4,a_5)$，$\vec{b}=(a_7,a_6)$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，则$\log_2 a_1+\log_2 a_2+\ldots+\log_2 a_{10}=$(　　)

A．12　　B．10　　C．5　　D．$2+\log_2 5$

【答案】C向量$\vec{a}$＝（a_4，a_5），$\vec{b}$＝（a_7，a_6），且$\vec{a}\cdot\vec{b}$＝4，$\therefore a_4a_7+a_5a_6$＝4，由等比数列的性质可得：$a_1a_{10}=\ldots\ldots=a_4a_7=a_5a_6=2$，则

$\log_2 a_1+\log_2 a_2+\cdots+\log_2 a_{10}=\log_2$（$a_1a_2\cdot a_{10}$）$=\log_2(a_1a_{10})^5=\log_2 2^5=5$．故选$C$

.

4．下列四个命题：

① 函数$f(x)=cosxsinx$的最大值为1；

②“$\forall x\in R$，$x^3-x^2+1\le 0$”的否定是“$\exists x_0\in R, x^3-x^2+1>0$”；

③ 若$\triangle ABC$为锐角三角形，则有$sinA+sinB+sinC>cosA+cosB+cosC$；

④“$a\le 0$”是“函数$f(x)=|x^2-ax|$在区间$(0,+\infty)$内单调递增”的充分必要条件．

其中错误的个数是(　　)

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【答案】A

解：①由 $f(x)=cosxsinx=\frac{1}{2}sin2x$,得 $f(x)$的最大值为$\frac{1}{2}$,故①错误;

②"$\forall x\in R,x^3-x^2+1\le 0$"的否定是"$\exists x_0\in R,x^3-x^2+1>0$",故②正确;

③$\because \triangle ABC$为锐角三角形,$\therefore A+B>\frac{\pi}{2}$,则$A>\frac{\pi}{2}-B$,

$\because y=sinx$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上是增函数,$sinA>sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=cosB$,同理可得$sinB>cosC$,

$sinC>cosA$,$\therefore sinA+sinB+sinC>cosA+cosB+cosC$,故③正确;

④$a\le 0$,函数$f(x)=\left|x^2-ax\right|$的零点是a,0,结合二次函数的对称轴,

可得函数$f(x)=\left|x^2-ax\right|$在区间$(0,+\infty)$内单调递增;

若函数$f(x)=\left|x^2-ax\right|$在区间$(0,+\infty)$内单调递增,结合二次函数的对称轴,可得

$\frac{a}{2}\le 0$,

$\therefore a\le 0$,$\therefore$"$a\le 0$"是"函数$f(x)=\left|x^2-ax\right|$在区间$(0,+\infty)$内单调递增"的充分必要条件,故④正确．其中错误的个数是1.故选:A.

5．在锐角ΔABC中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，若$\sin^2 C-\cos^2 C=\frac{1}{2}$，则下列各式正确的是（　　）

A．$a+b=2c$　　　　B．$a+b\le 2c$

C．$a+b<2c$　　　　D．$a+b\ge 2c$

【答案】B

$\sin^2 C-\cos^2 C=-\cos 2C=\frac{1}{2}$即$\cos 2C=-\frac{1}{2}$，$C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore 2C=\frac{2}{3}\pi$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$，根据正弦定理可知$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$　，

$\therefore a+b-2c=2R(\sin A+\sin B-2\sin C)$，

$=\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\sqrt{3}=\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\le 0$,当$A=\frac{\pi}{3}$

$\sin A+\sin B-2\sin C=\sin A+\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}$时，等号成立，

$\therefore a+b-2c\le 0$即$a+b\le 2c$.故选：B

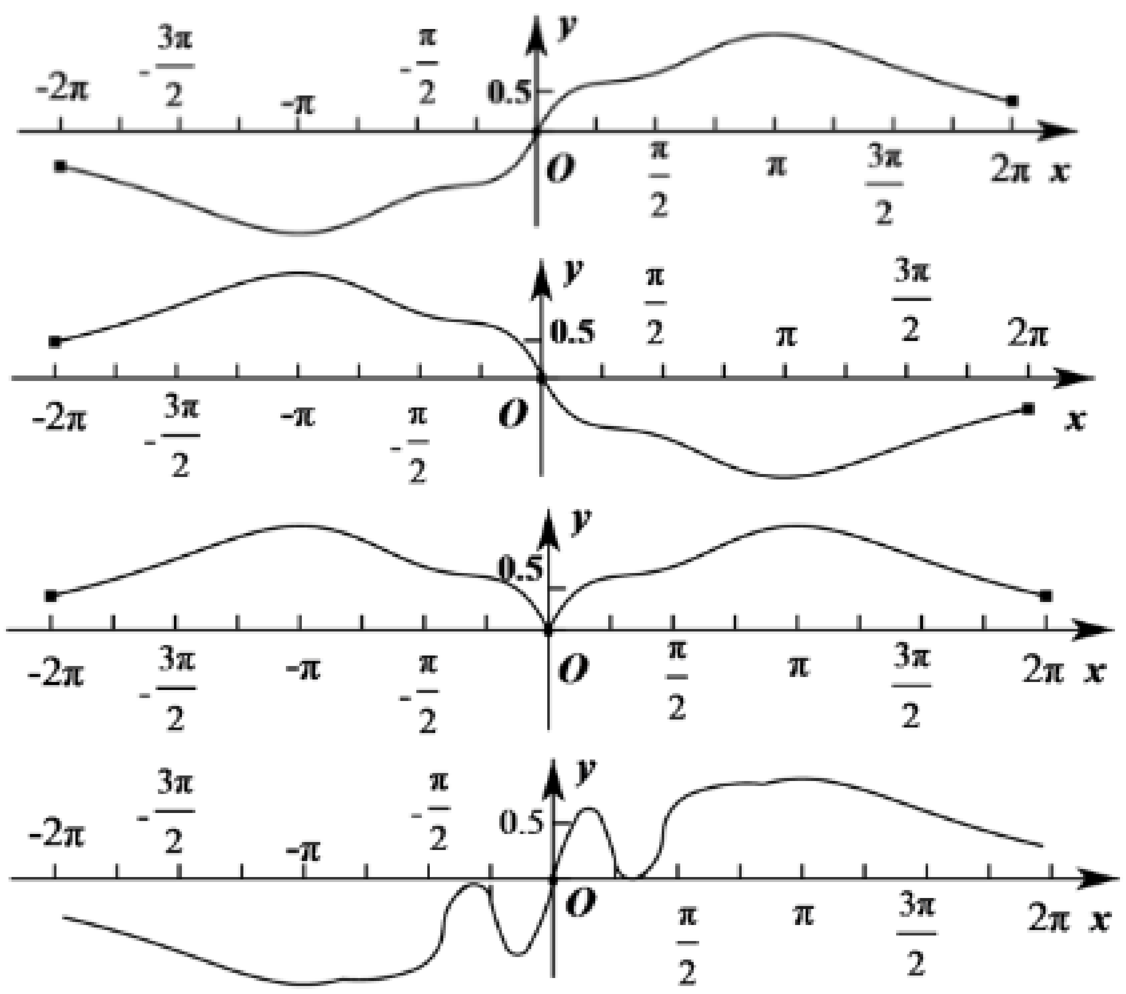
6．函数$f(x)=\frac{\sin 2x+x^3}{e^{|x|}}$在$[-2\pi,2\pi]$上的图象大致为（　　）

A．

B．

C．

D．

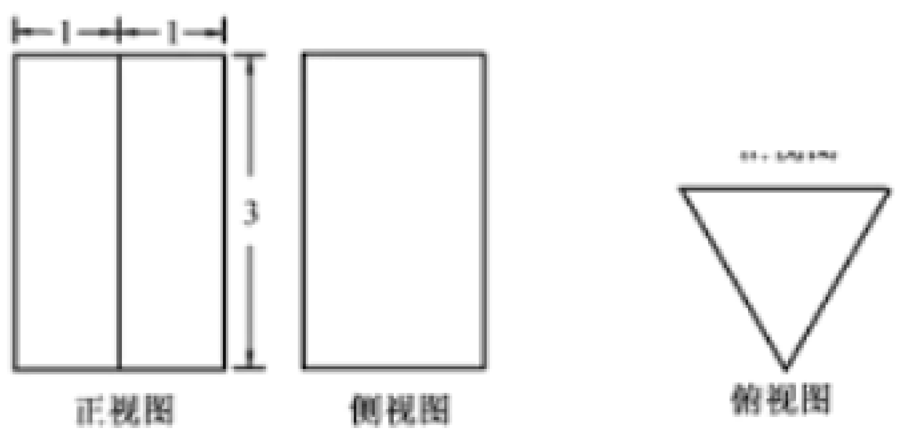


【答案】A

依题意，$f\left(-x\right)=\dfrac{\sin 2\left(-x\right)+\left(-x\right)^{3}}{e^{\left|-x\right|}}=-\dfrac{\sin 2x+x^{3}}{e^{\left|x\right|}}=-f\left(x\right)$，故函数$f\left(x\right)$为奇函数，图象关于原点对称，排除C；

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2}+\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{3}}{e^{\left|\frac{\pi}{4}\right|}}>\dfrac{1+\dfrac{\pi^{3}}{64}}{e}>\dfrac{1+\dfrac{3^{3}}{4}}{2.8}=\dfrac{1+\dfrac{27}{64}}{2.8}=\dfrac{91}{2.8\times 64}=\dfrac{91}{179.2}>\dfrac{91}{182}=0.5$，排除B，D.故选：A

7．某简单几何体的三视图（俯视图为等边三角形）如图所示（单位：cm），则该几何体的体积（单位：cm^3）为



A．18　　B．$6\sqrt{3}$　　C．$3\sqrt{3}$　　D．$2\sqrt{3}$

【答案】C

由题意可知几何体是底面为正三角形的三棱柱，底面边长为2，高为3， 所以几何体的体积为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^{2}\times 3=3\sqrt{3}$，故选$C$.

8．已知正方形$ABCD$的边长为2，以B为圆心的圆与直线AC相切.若点P是圆B上的动点，则$\overline{DB}\cdot\overline{AP}$的最大值是（　　）

A．$2\sqrt{2}$　　B．$4\sqrt{2}$　　C．4　　D．8

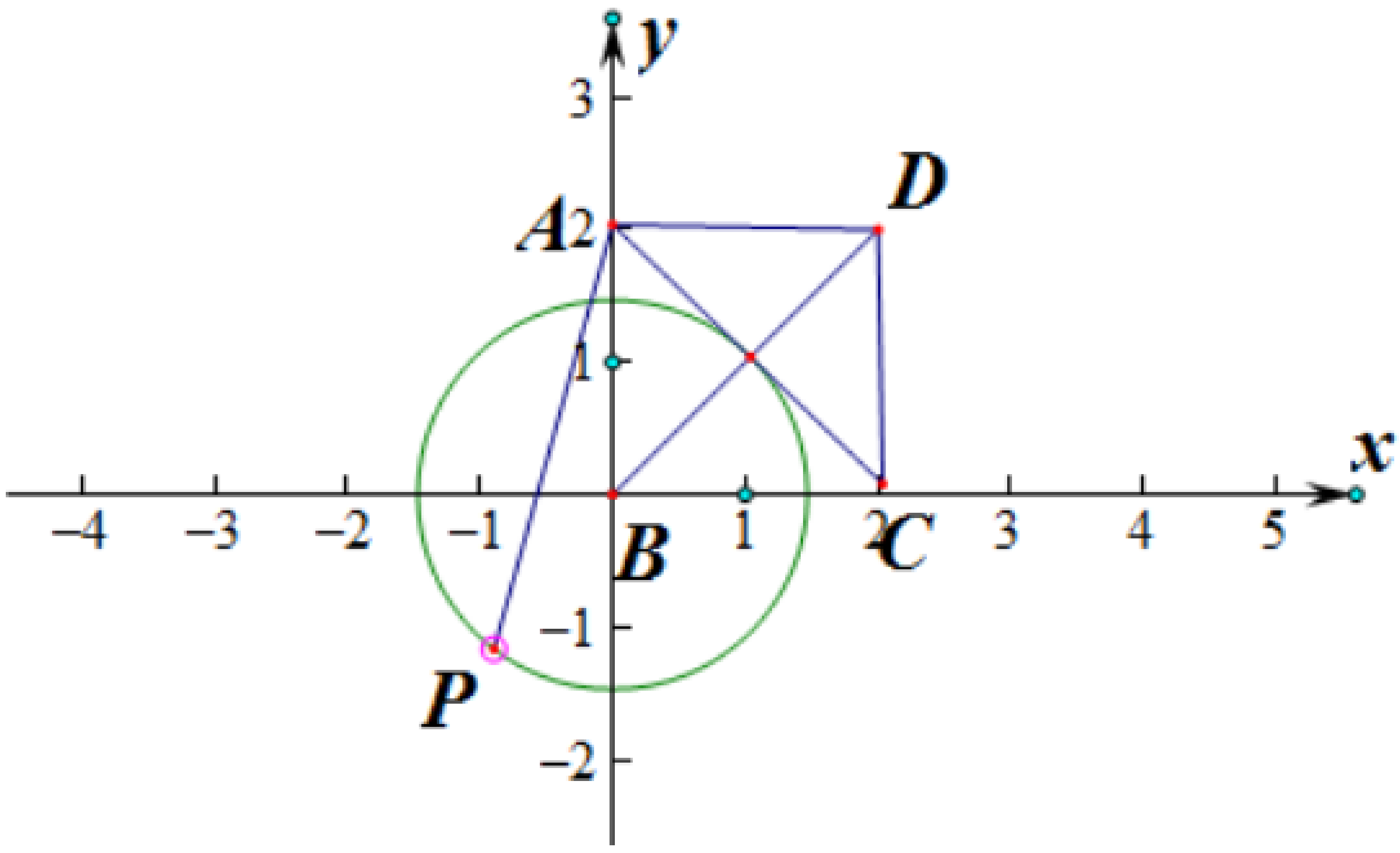
【答案】D如图，建立平面直角坐标系，则 $B(0,0)$，$A(0,2)$，$D(2,2)$，

圆 B 的方程为：$x^2+y^2=2$，$\therefore P\left(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta\right)$，$\therefore \overline{DB}=(-2,-2)$，

$\overline{AP}=\left(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta-2\right)$，

$\therefore \overline{DB}\cdot\overline{AP}=-2\sqrt{2}\cos\theta-2\sqrt{2}\sin\theta+4=4-4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ $\therefore \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-1$时，

$\overline{DB}\cdot\overline{AP}$的最大值是8，故选：D



9．已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)+1$（$\omega>1$，$|\varphi|\le\frac{\pi}{2}$），其图像与直线 $y=-1$ 相邻两个交点的距离为 π，若 $f(x)>1$ 对于任意的 $x\in\left(-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right)$ 恒成立，则 φ 的取值范围是

A $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right]$　　B $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$　　C $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$　　D $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$

【答案】C

令 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)+1=-1$，可得 $\sin(\omega x+\varphi)=-1$，$\because$函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)+1$（$\omega>1$，$|\varphi|\le\frac{\pi}{2}$）的图像与直线 $y=-1$ 相邻两个交点的距离为 π，$\therefore$函数 $g(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象与直线 $y=-1$ 相邻两个交点的距离为 π，$\therefore$函数 $g(x)$ 的周期为 π，故 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，$\therefore\omega=2$。$\therefore$ $f(x)=2\sin(2x+\varphi)+1$.由题意得“$f(x)>1$ 对于任意的 $x\in\left(-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right)$ 恒成立”等价于“$\sin(2x+\varphi)>0$ 对于任意的 $x\in\left(-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right)$ 恒成立”。$\because -\frac{\pi}{12}<x<\frac{\pi}{3}$ $\therefore$ $-\frac{\pi}{6}+\varphi<2x+\varphi<\frac{2\pi}{3}+\varphi$，$\therefore$ $\left(-\frac{\pi}{6}+\varphi,\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)\subseteq(2k\pi,2k\pi+\pi),k\in Z$，$\therefore$ $\frac{\pi}{6}+2k\pi\le\varphi\le2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in Z$。故结合所给选项可得C正确。选C。

10．已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$P$为椭圆上不同于左、右顶点的任意一点，$I$为$\Delta PF_1F_2$的内心，且$S_{\Delta IPF_1}=\lambda S_{\Delta IF_1F_2}-S_{\Delta IPF_2}$，若椭圆的离心率为$e$，则$\lambda=$（　　）

A．$\dfrac{1}{e}$　　　　B．$\dfrac{2}{e}$　　　　C．e　　　　D．$2e$

【答案】A设ΔPF_1F_2内切圆的半径为r

则$S_{\Delta IPF_1}=\dfrac{1}{2}r\cdot|PF_1|$，$S_{\Delta IPF_2}=\dfrac{1}{2}r\cdot|PF_2|$，$S_{\Delta IF_1F_2}=\dfrac{1}{2}r\cdot|F_1F_2|\cdot$

$\because S_{\Delta IPF_1}=\lambda S_{\Delta IF_1F_2}-S_{\Delta IPF_2}$，$\therefore \dfrac{1}{2}r\cdot|PF_1|=\dfrac{\lambda}{2}r\cdot|F_1F_2|-\dfrac{1}{2}r\cdot|PF_2|$

整理得$\lambda|F_1F_2|=|PF_1|+|PF_2|$.$\because P$为椭圆上的点，$\therefore \lambda\cdot 2c=2a$，解得$\lambda=\dfrac{1}{e}$.故选：$A$

11．已知椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$的右焦点$F$是抛物线$y^2=2px\,(p>0)$的焦点，则过$F$作倾斜角为$60^\circ$的直线分别交抛物线于$A,B$（$A$在$x$轴上方）两点，则$\dfrac{|AF|}{|BF|}$的值为（　　）

A．$\sqrt{3}$　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

【答案】C

由椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，可得右焦点为$(1,0)$，所以$\dfrac{p}{2}=1$，解得$p=2$，

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由抛物线的定义可得

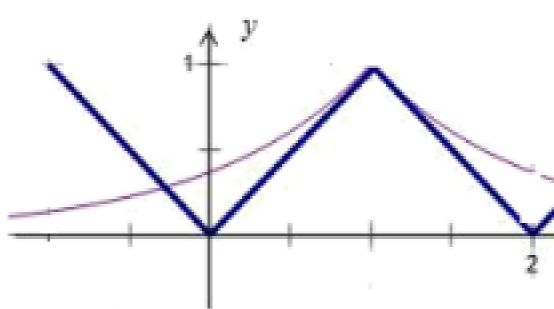
$|AB|=x_1+x_2+p=\dfrac{2p}{\sin^2 60^\circ}=\dfrac{8p}{3}=\dfrac{16}{3}$，所以$x_1+x_2=\dfrac{10}{3}$，

又由$x_1x_2=\dfrac{p^2}{4}=1$，可得$x_1=3,x_2=\dfrac{1}{3}$，所以$\dfrac{|AF|}{|BF|}=\dfrac{x_1+\dfrac{p}{2}}{x_2+\dfrac{p}{2}}=\dfrac{3+1}{\dfrac{1}{3}+1}=3$.故选C.

12．已知定义在R上的偶函数$f(x)$满足$f(1+x)=f(1-x)$，当$x\in[0,1]$时，$f(x)=x$．函数$g(x)=e^{-|x-1|}(-1<x<3)$，则$f(x)$与$g(x)$的图象所有交点的横坐标之和为

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

【答案】A【解析】根据题意，函数$f(x)$满足$f(1+x)=f(1-x)$，则$f(x)$的图象关于直线$x=1$对称，函数$g(x)=e^{-|x-1|}(-1<x<3)$的图象也关于直线$x=1$对称，函数$y=f(x)$的图象与函数$g(x)=e^{-|x-1|}(-1<x<3)$的图象的位置关系如图所示，

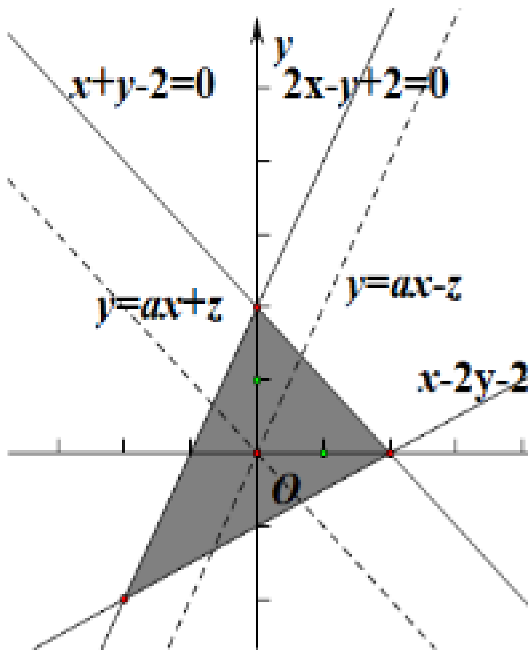


可知两个图象有3个交点，一个在直线$x=1$上，另外2个关于直线$x=1$对称，则两个函数图象所有交点的横坐标之和为3；故选：A．

第II卷（非选择题）

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。把答案填在题中的横线上。

13.已知x,y满足条件$\begin{cases}x+y-2\le 0\\ x-2y-2\le 0\\ 2x-y+2\ge 0\end{cases}$，若目标函数$z=-ax+y$取得最大值的最优解不唯一，则实数$a$的值为_________．



【答案】2或-1.【详解】画出不等式组$\begin{cases}x+y-2\le 0\\ x-2y-2\le 0\\ 2x-y+2\ge 0\end{cases}$对应的平面区域如图中阴影所示

将$z=-ax+y$转化为$y=ax+z$，所以目标函数z代表直线$y=ax+z$在y轴上的截距

若目标函数$z=-ax+y$取得最大值的最优解不唯一

则直线$y=ax+z$应与直线$x+y-2=0$或$2x-y+2=0$平行，如图中虚线所示

又直线$x+y-2=0$和$2x-y+2=0$的斜率分别为-1和2

所以$a=2$或$a=-1$故答案为：2或-1.

14．函数$f(x)=\sqrt{x}\ln x+a$的图象在$x=1$处的切线被圆$C:x^2+y^2-2x+4y-4=0$截得弦长为2，则实数a的值为________．

14．-6或2　【解析】本题考查导数的几何意义以及直线与圆的位置关系．由题可知切线的斜率$k=f'(1)=1$．又$f(1)=a$，所以切点坐标为$(1,a)$，所以函数$f(x)=\sqrt{x}\ln x+a$的图象在$x=1$处的切线方程为$y=x+a-1$．又因为圆$C:x^2+y^2-2x+4y-4=0$的圆心坐标为$(1,-2)$，半径为3，所以圆心到切线的距离$d=\dfrac{|2+a|}{\sqrt{2}}$．因为切线被圆$C:x^2+y^2-2x+4y-4=0$截得弦长为2，则$\left(\dfrac{|2+a|}{\sqrt{2}}\right)^2+1^2=3^2$，解得实数a的值是$-6$或2．

15．已知$(1+2x)^6$展开式的二项式系数的最大值为a，系数的最大值为b，则$\dfrac{b}{a}=$__________．

【答案】12

由题意可知 $(1+2x)^6$ 展开式的二项式系数为 $C_6^r(r=0,1,\cdots,6)$，当 $r=3$ 时，取得最大值 $a=C_6^3=20$

$(1+2x)^6$ 展开式的系数为 $C_6^r2^r(r=0,1,\cdots,6)$，当满足 $\begin{cases}C_6^r2^r\ge C_6^{r+1}2^{r+1}\\C_6^r2^r\ge C_6^{r-1}2^{r-1}\end{cases}$ 时，系数最大.

即 $\begin{cases}\dfrac{6!}{r!(6-r)!}2^r\ge\dfrac{6!}{(r+1)![6-(r+1)]!}2^{r+1}\\\dfrac{6!}{r!(6-r)!}2^r\ge\dfrac{6!}{(r-1)![6-(r-1)]!}2^{r-1}\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}\dfrac{1}{6-r}\ge\dfrac{2}{r+1}\\\dfrac{2}{r}\ge\dfrac{1}{7-r}\end{cases}$，即 $\begin{cases}r+1\ge2(6-r)\\2(7-r)\ge r\end{cases}$ 解得 $\dfrac{11}{3}\le r\le\dfrac{14}{3}$

又 $\because r=0,1,\cdots,6\therefore r=4$ 时，系数的最大值为 $b=C_6^42^4=240$ 则 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{240}{20}=12$ 故答案为：12

16．平行四边形 $ABCD$ 中，△ ABD 是腰长为 2 的等腰直角三角形，$\angle ABD=90°$，现将△ ABD 沿 BD 折起，使二面角 $A-BD-C$ 大小为 $\dfrac{2\pi}{3}$，若 A,B,C,D 四点在同一球面上，则该球的表面积为_____.

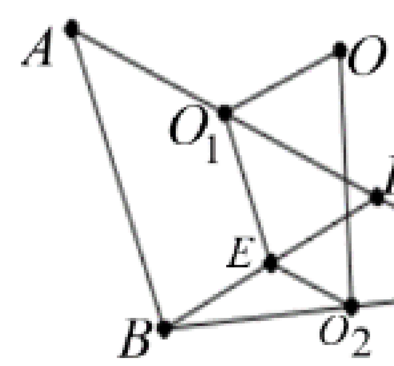
【答案】20π　由题意，取 AD,BC 的中点分别为 O_1,O_2，

过 O_1 作面 ABD 的垂线与过 O_2 作面 BCD 的垂线，两垂线交点 O 即为所求外接球的球心，

取 BD 中点 E，连结 O_1E,O_2E，

则 $\angle O_1EO_2$ 即为二面角 $A-BD-C$ 的平面角，又由 $O_1E=O_2E=1$，连接 OE，在 $Rt\triangle O_1OE$ 中，则 $O_1O=\sqrt{3}$，在 $Rt\triangle O_1OA$ 中，$O_1A=\sqrt{2}$，得 $OA=\sqrt{5}$，

即球半径为 $R=OA=\sqrt{5}$，所以球面积为 $S=4\pi R^2=20\pi$.



三、解答题：本大题共6小题，共70分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.第17-21题为必做题,每个考生都必须作答.第22/23题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共60分

17．已知△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c.

（1）若 $B=\dfrac{\pi}{3}$，$b=\sqrt{7}$，△ABC 的面积 $S=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，求 $a+c$ 值；

（2）若 $2\cos C$（$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$）$=c^2$，求角 C.

【答案】（1）5（2）$\dfrac{\pi}{3}$

解：（1）$\because B=\frac{\pi}{3}$，$b=\sqrt{7}$，$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$\therefore \frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac$，可得：$ac=6$，$\because$由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，可得：$7=a^2+c^2-ac=(a+c)^2-3ac=(a+c)^2-18$，解得：$a+c=5$．

（2）$\because 2\cos C(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})=c^2$，

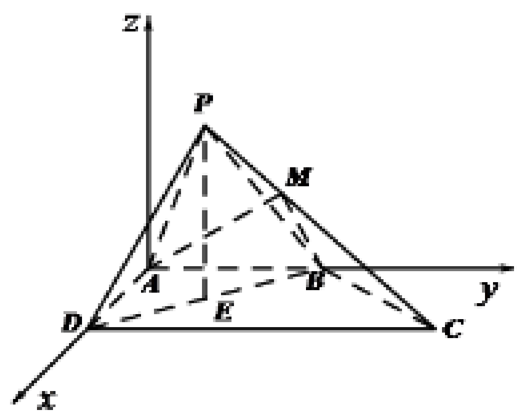
$\therefore 2\cos C(ac\cos B+bc\cos A)=c^2$，可得：$2\cos C(a\cos B+b\cos A)=c$，

$\therefore$由正弦定理可得：$2\cos C(\sin A\cos B+\sin B\cos A)=\sin C$，即$2\cos C\sin C=\sin C$，

$\because \sin C\neq 0$，$\therefore \cos C=\frac{1}{2}$，$\because C\in(0,\pi)$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$．

18.（12分）如图,四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB//DC$，$\angle ADC=\frac{\pi}{2}$，

$AB=AD=\frac{1}{2}CD=2$，$PD=PB=\sqrt{6}$，$PD\perp BC$．



（1）求证：平面 $PBD\perp$ 平面 PBC；

（2）在线段 PC 上是否存在点M，使得平面 ABM 与平面 PBD 所成锐二面角为 $\frac{\pi}{3}$？

若存在，求 $\frac{CM}{CP}$ 的值；若不存在，说明理由．

（1）证明：因为四边形$ABCD$为直角梯形，且$AB//DC, AB=AD=2, \angle ADC=\frac{\pi}{2}$,

所以$BD=2\sqrt{2}$，　又因为$CD=4, \angle BDC=\frac{\pi}{4}$。根据余弦定理得$BC=2\sqrt{2}$, 所以

$CD^2=BD^2+BC^2$，故$BC\perp BD$．又因为$BC\perp PD, PD\cap BD=D$,且$BD,PD\subset$平面PBD，所以

$BC\perp$平面PBD，

又因为$BC\subset$平面PBC，所以平面$PBC\perp$平面PBD

（2）由（1）得平面$ABCD\perp$平面PBD，设E为BD的中点，连结PE，因为$PB=PD=\sqrt{6}$,

所以$PE\perp BD, PE=2$,又平面$ABCD\perp$平面PBD，平面$ABCD\cap$平面$PBD=BD$，$PE\perp$平面$ABCD$.

如图，以A为原点分别以$\vec{AD}$，$\vec{AB}$和垂直平面$ABCD$的方向为x,y,z轴正方向，建立空间直角坐标系$A-xyz$，

则$A(0,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(2,4,0)$，$D(2,0,0)$，$P(1,1,2)$，

假设存在$M(a,b,c)$满足要求，设$\frac{CM}{CP}=\lambda(0\leq\lambda\leq 1)$，即$\vec{CM}=\lambda\vec{CP}$，

所以$M(2-\lambda,4-3\lambda,2\lambda)$,易得平面$PBD$的一个法向量为$\vec{BC}=(2,2,0)$.

设$\vec{n}=(x,y,z)$为平面ABM的一个法向量，$\vec{AB}=(0,2,0)$，$\vec{AM}=(2-\lambda,4-3\lambda,2\lambda)$

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\vec{AM}=0\end{cases}$ 得$\begin{cases}2y=0\\ (2-\lambda)x+(4-3\lambda)y+2\lambda z=0\end{cases}$，不妨取$\vec{n}=(2\lambda,0,\lambda-2)$.

因为平面PBD与平面ABM所成的锐二面角为$\frac{\pi}{3}$，所以$\frac{|4\lambda|}{2\sqrt{2}\sqrt{4\lambda^2+(\lambda-2)^2}}=\frac{1}{2}$,

解得$\lambda=\frac{2}{3}, \lambda=-2$，（不合题意舍去）.故存在$M$点满足条件，且$\frac{CM}{CP}=\frac{2}{3}$.

19．近来天气变化无常，陡然升温、降温幅度大于$10^{\circ}C$的天气现象出现增多.陡然降温幅度大于$10^{\circ}C$容易引起幼儿伤风感冒疾病.为了解伤风感冒疾病是否与性别有关，在某妇幼保健院随机对人院的100名幼儿进行调查,得到了如下的列联表,若在全部100名幼儿中随机抽取1人，抽到患伤风感冒疾病的幼儿的概率为$\frac{2}{5}$,

(1)请将下面的列联表补充完整;

	患伤风感冒疾病	不患伤风感冒疾病	合计
男		25	
女	20		
合计			100

(2)能否在犯错误的概率不超过0.1的情况下认为患伤风感冒疾病与性别有关?说明你的理由;

(3)已知在患伤风感冒疾病的20名女性幼儿中,有2名又患黄疸病.现在从患伤风感冒疾病的20名女性中,选出2名进行其他方面的排查,记选出患黄疸病的女性人数为X,求X的分布列以及数学期望.下面的临界值表供参考:

$P\left(K^2\geq k_0\right)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.076	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

参考公式：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$.

【答案】(1)见解析,(2) 不能在犯错误的概率不超过0.1的情况下认为患伤风感冒疾病与性别有关.(3)分布列见解析,$\frac{1}{5}$

(1)列联表补充如下;

	患伤风感冒疾病	不患伤风感冒疾病	合计
男	20	25	45
女	20	35	55

合计	40	60	100

(2)计K^2算的观测值为 $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$=\frac{100\times(20\times35-20\times25)^2}{40\times60\times45\times55}\approx0.6734<2.706$,

所以不能在犯错误的概率不超过0.1的情况下认为患伤风感冒疾病与性别有美.

(3)根据题意, X 的值可能为 $0,1,2$.

则 $P(X=0)=\frac{C_{12}^2}{C_{20}^2}=\frac{153}{190}, P(X=1)=\frac{C_{15}^1}{C_{20}^2}=\frac{18}{95}, P(X=2)=\frac{C_2^2}{C_{20}^2}=\frac{1}{190}$,

故 X 的分布列如下:

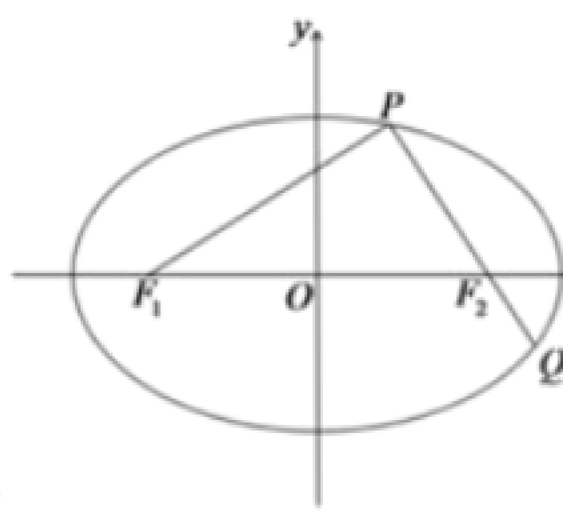
X	0	1	2
P	$\frac{153}{190}$	$\frac{18}{95}$	$\frac{1}{190}$

故 X 的数学期望: $E(X)=0\times\frac{153}{190}+1\times\frac{18}{95}+2\times\frac{1}{190}=\frac{1}{5}$.

20. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，过 F_2 的一条直线交椭圆于 P、Q 两点，若 ΔPF_1F_2 的周长为 $4+4\sqrt{2}$，且长轴长与短轴长之比为 $\sqrt{2}:1$.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)若 $\left|\overrightarrow{F_1P}+\overrightarrow{F_2Q}\right|=\left|\overrightarrow{PQ}\right|$，求直线 PQ 的方程.



【答案】(1) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$; (2) $\sqrt{2}x\pm y-2\sqrt{2}=0$

(1)由条件可知: $2a+2c=4+4\sqrt{2}$， $a:b=\sqrt{2}:1$，

$\because a^2=b^2+c^2$，解得: $a=2\sqrt{2}, b=2, c=2$，所以椭圆 C 的方程为

$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

(2)设直线 PF_2 的方程为: $x=ty+2, P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2)$;

因为 $\overline{F_1P}+\overline{F_2Q}=\overline{F_1O}+\overline{OP}+\overline{F_2O}+\overline{OQ}=\overline{OP}+\overline{OQ}$，

所以 $\left|\overline{OP}+\overline{OQ}\right|=\left|\overline{PQ}\right|$，所以 $OP\perp OQ$，所以 $x_1x_2+y_1y_2=0$，

$\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\\ x=ty+2\end{cases}\Rightarrow(t^2+2)y^2+4ty-4=0$， $y_1+y_2=\frac{-4t}{t^2+2}, y_1y_2=\frac{-4}{t^2+2}$

$x_1+x_2+y_1y_2=\left(t^2+1\right)y_1y_2+2\left(t^4+1\right)y_1y_2$，解得：$t^2=\frac{1}{2}, t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

所以直线 PQ 的方程为 $\sqrt{2}x\pm y-2\sqrt{2}=0$.

21．已知函数 $f(x)=e^x-\cos x$.

（1）求 $f(x)$在点$(0, f(0))$处的切线方程；

（2）求证：$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},+\infty\right)$上仅有2个零点.

【答案】（1）$x-y=0$；（2）证明见解析.

（1）Q $f(x)=e^x-\cos x$，则 $f'(x)=e^x+\sin x$，$\therefore$ $f(0)=0$，$f'(0)=1$.

因此，函数 $y=f(x)$在点$(0, f(0))$处的切线方程为 $y=x$，即 $x-y=0$；

（2）当 $x>0$ 时，$e^x>1\geq\cos x$，此时，$f(x)=e^x-\cos x>0$，所以，函数

$y=f(x)$在区间$(0,+\infty)$上没有零点；

又 $f(0)=0$，下面只需证明函数 $y=f(x)$在区间$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$上有且只有一个零点.

$f'(x)=e^x+\sin x$，构造函数 $g(x)=e^x+\sin x$，则 $g'(x)=e^x+\cos x$，

当$-\frac{\pi}{2}<x<0$时，$g'(x)=e^x+\cos x>0$，

所以，函数 $y=f'(x)$在区间$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$上单调递增，

Q $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}-1<0$，$f'(0)=1>0$，由零点存在定理知，存在 $t\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，

使得 $f'(t)=0$，且当$-\frac{\pi}{2}<x<t$时，$f'(x)<0$，当 $t<x<0$时，$f'(x)>0$.

所以，函数 $y=f(x)$在 $x=t$ 处取得极小值，则 $f(t)<f(0)=0$，

又 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}>0$，所以 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot f(t)<0$，由零点存在定理可知，函数

$y=f(x)$在区间$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$上有且只有一个零点.

综上所述，函数 $y=f(x)$在区间$\left(-\frac{\pi}{2},+\infty\right)$上有且仅有两个零点.

（二）选考题：共10分.请考生在22,23题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22．（10分）在平面直角坐标系xoy中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\cos\alpha\\ y=\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数），以坐标原点O为极点，x轴非负半轴为极轴建立极坐标系，点A为曲线 C_1 上的动点，点B在线段OA 的延长线上，且满足 $|OA|\cdot|OB|=8$，点B的轨迹为 C_2.

（1）求曲线 C_1， C_2 的极坐标方程；

（2）设点 M 的极坐标为 $(2,\frac{\pi}{2})$，求 $\triangle ABM$ 面积的最小值。

解:（1）因为 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+cos\alpha\\ y=sin\alpha\end{cases}$ （α 为参数），消去参数得 $(x-1)^2+y^2=1$，则一般式为 $x^2+y^2-2x=0$，由 $\rho^2=x^2+y^2,x=\rho\cos\theta$，可得 C_1 的极坐标方程为；设，则 $\rho_1=|OA|$，而为曲线 C_1 上的动点，则 $\rho_1=2\cos\theta$，因为点在线段 的延长线上，则设，有，因为 $|OA|\cdot|OB|=\rho_1\cdot\rho=8$，所以得 $2\cos\theta\cdot\rho=8$，即，所以 C_2 的极坐标方程为.

（2）由（1）可知，$|AB|=|OB|-|OA|=\rho-\rho_1=\frac{4}{\cos\theta}-2\cos\theta$，边上的高为 $h=|OM|\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=2\cos\theta$，则 $S_{\Delta ABM}=\frac{1}{2}\cdot(\frac{4}{\cos\theta}-2\cos\theta)\cdot 2\cos\theta=4-2\cos^2\theta$，因为 $\cos^2\theta\in[0,1]$，所以当 $\cos^2\theta=1$ 时，$S_{\min}=4-2=2$.

23．选修4－5：不等式选讲

设 $f(x)=|x+2|+|2x-1|-m$.

（1）当m=5时，解不等式 $f(x)\geq 0$；

（2）若 $f(x)\geq\frac{3}{2}$ 对任意 $x\in R$ 恒成立，求实数m的取值范围．

【答案】（1）$\left\{x\middle|x\leq -2或x\geq\frac{4}{3}\right\}$；（2）$(-\infty,1]$.

【解析】（1）当 $m=5$ 时，$f(x)=|x+2|+|2x-1|-5$,

不等式 $f(x)\geq 0$ 为 $|x+2|+|2x-1|\geq 5$,

①当 $x\leq -2$ 时，不等式为：$-3x-1\geq 5$，即 $x\leq -2$，满足；

②当 $-2<x<\frac{1}{2}$ 时，不等式为：$-x+3\geq 5$，即 $x\leq -2$，不满足；

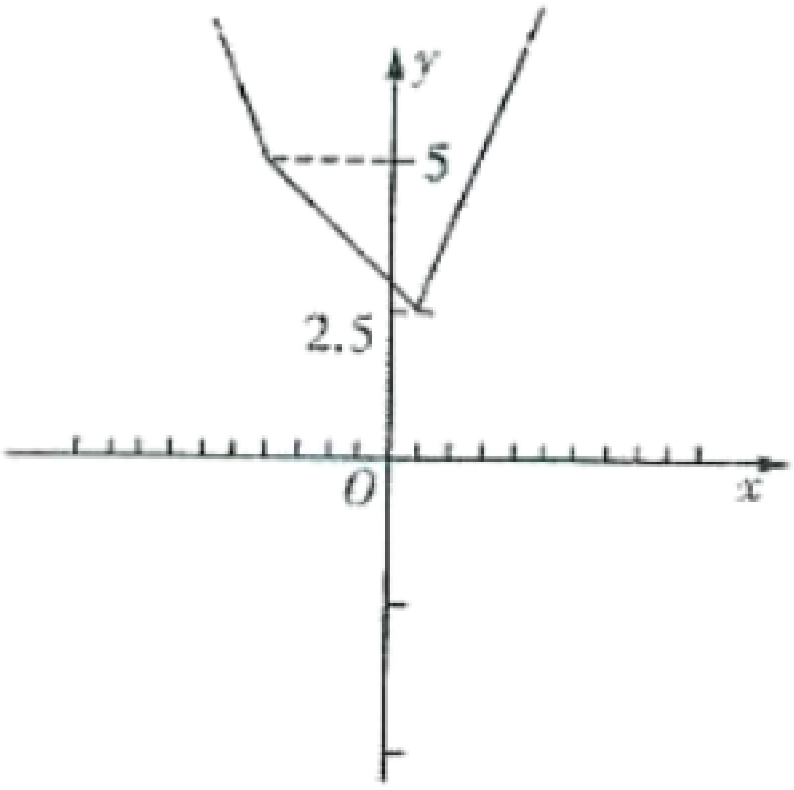
③当 $x\geq\frac{1}{2}$ 时，不等式为：$3x+1\geq 5$，即 $x\geq\frac{4}{3}$，满足．

综上所述，不等式 $f(x)\geq 0$ 的解集为 $\left\{x\middle|x\leq -2或x\geq\frac{4}{3}\right\}$.

设 $g(x)=|x+2|+|2x-1|$，若 $f(x)\geq\frac{3}{2}$ 对于任意 $x\in R$ 恒成立，

即 $g(x)=|x+2|+|2x-1|\geq m+\frac{3}{2}$ 对于任意 $x\in R$ 恒成立，

$$g(x)=|x+2|+|2x-1|=\begin{cases}-3x-1(x\leq -2),\\ -x+3(-2<x<\frac{1}{2}),\\ 3x+1(x\geq\frac{1}{2}),\end{cases}$$



由图可看出$g(x)=|x+2|+|2x-1|$的最小值是$\frac{5}{2}$，

所以$m+\frac{3}{2}\le\frac{5}{2}$，$\therefore m\le 1$，即m的取值范围是$(-\infty,1]$．

考点：绝对值不等式的解法，恒成立问题的转化。