2018 年河北省高中数学竞赛试卷(高三年级组)答案

(时间：6 月 24 日下午 2:30-5:30)

一、填空题：共 8 道小题，每小题 8 分，共 64 分.

1. 若 $z\in C$ 且 $|z+2-2i|=1$，则 $|z-2-2i|$ 的最小值是________.

【答案】 3

【解析】复数 z 在复平面内对应的点的轨迹是以 $(-2,2)$ 为圆心、以 1 为半径的圆，$|z-2-2i|$ 表示复数 z 在复平面内对应的点到 $(2,2)$ 的距离，故最小值是 3.

2. 若 x、$y\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$，$a\in R$，且满足 $\begin{cases}x^3+\sin x-3a=0\\9y^3+\frac{1}{3}\sin 3y+a=0\end{cases}$，则 $\cos(x+3y)=$______.

【答案】 1

【解析】把已知条件变形为 $\begin{cases}x^3+\sin x-3a=0\\(3y)^3+\sin 3y+3a=0\end{cases}$，函数 $f(t)=t^3+\sin t$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 为增函数且是奇函数，且 $x,3y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 故 $x=-3y$ 即 $x+3y=0$，所以 $\cos(x+3y)=1$

3. 设点 O 为三角形 ABC 内一点，且满足关系式 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$，则 $\frac{S_{\Delta AOB}+2S_{\Delta BOC}+3S_{\Delta COA}}{S_{\Delta ABC}}=$________.

【答案】 $\frac{11}{6}$

【解析】将 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ 化为 $3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，

$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})=\vec{0}$，设 M、N 是 AB、AC 的中点，则 $\overrightarrow{OM}=-2\overrightarrow{ON}$，

设 ΔABC 的面积为 S，由几何关系知 $S_{\Delta BOC}=\frac{1}{2}S,S_{\Delta AOB}=\frac{1}{3}S,S_{\Delta AOC}=\frac{1}{6}S$

所以 $\frac{S_{\Delta AOB}+2S_{\Delta BOC}+3S_{\Delta COA}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{11}{6}$.

4. 过动点 M 作圆 C：$(x-2)^2+(y-2)^2=1$ 的切线 MN，其中 N 为切点，若 $|MN|=|MO|$，O，

1

为坐标原点），则$|MN|$的最小值为________.

【答案】$\frac{7\sqrt{2}}{8}$

【解析】设$M(x,y)$，由$|MN|=|MO|$知：$|MO|^2+|NC|^2=|MC|^2$，

即$x^2+y^2+1=(x-2)^2+(y-2)^2$，化简为：$4x+4y-7=0$，所以点$M$的轨迹是直线．所以

$|MN|$的最小值等于$|MO|$的最小值，等于点O到直线$4x+4y-7=0$的距离$\frac{7\sqrt{2}}{8}$.

5. 欲登上7级楼梯，某人可以每步跨上两阶楼梯，也可以每步跨上一阶楼梯，则共有________种上楼梯的方法.

【答案】21

【解析】本题采用分步计数原理

第一类:0次一步跨上2阶楼梯，即每步跨上一阶楼梯，跨7次楼梯，只有1种上楼梯的方法；

第二类:1次一步跨上2阶楼梯，5次每步跨上一阶楼梯，跨6次楼梯，有$C_6^1=6$种方法；

第三类:2次一步跨上2阶楼梯，3次每步跨上一阶楼梯，跨5次楼梯，有$C_5^2=10$种方法；

第四类:3次一步跨上2阶楼梯，1次每步跨上一阶楼梯，跨4次楼梯，有$C_4^3=4$种方法；

共计21种上楼梯的方法.

6. 已知棱长为$\sqrt{3}$的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$内部有一圆柱，此圆柱恰好以直线AC_1为轴，则该圆柱体积的最大值为________.

【答案】$\frac{\pi}{2}$

【解析】由题知只需考虑圆柱的底面与正方体的表面相切的情况，由图形的对称性可知，圆柱的上底面必与过A点的三个面相切，且切点分别在AB_1,AC,AD_1上，设线段AB_1上的切点为E，圆柱上底面中心为O_1，半径$O_1E=r$，由$\Delta AO_1E\backsim\Delta AB_1C_1$得$AO_1=\sqrt{2}r$，则圆柱的高为$3-2AO_1=3-2\sqrt{2}r$，$V=\pi r^2(3-2\sqrt{2}r)$，由导数法或均值不等式得$V_{\max}=\frac{\pi}{2}$.

7. 若实数x、y、z满足$x^2+y^2+z^2=3,x+2y-2z=4$，则$z_{\max}+z_{\min}=$________.

【答案】$-\frac{16}{9}$

【解析】由柯西不等式得$(x^2+y^2)(1+2^2)\ge(x+2y)^2$，

由已知得$x^2+y^2=3-z^2,(x+2y)^2=(4+2z)^2$，所以得 $5(3-z^2)\ge(4+2z)^2$，

化简得$9z^2+16z+1\le0$，即$z_{\max},z_{\min}$为方程$9z^2+16z+1=0$的两根，

由韦达定理得$z_{\max}+z_{\min}=-\frac{16}{9}$.

8. 在ΔABC中，$AC=3$，$\sin C=k\sin A(k\ge2)$，则ΔABC的面积的最大值为______.

【答案】 3

【解析】由正弦定理将$\sin C=k\sin A$变形为$c=ka$，其中c,a为AB,BC的对边.

以线段AC所在直线为x轴，以AC中点O为坐标原点建立平面直角坐标系xoy，

则$A(-\frac{3}{2},0),C(\frac{3}{2},0)$，设$B(x,y)$，由$c=ka$得$\sqrt{(x+\frac{3}{2})^2+y^2}=k\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2+y^2}$，

两边平方整理得$(k^2-1)x^2+(k^2-1)y^2-(3k^2+3)x+\frac{9}{4}(k^2-1)=0$

因为$k\ge2$，所以上方程可化为$x^2+y^2-\frac{(3k^2+3)}{k^2-1}x+\frac{9}{4}=0$，

由此可知点B的轨是以$(\frac{3(k^2+1)}{2(k^2-1)},0)$为圆心，以$r=\frac{3k}{k^2-1}$为半径的圆，

所以当点B在圆上运动时，点B到x轴的最大距离为半径$r=\frac{3k}{k^2-1}$，所以ΔABC的面积的最大值$S=\frac{1}{2}\times3\times\frac{3k}{k^2-1}(k\ge2)$，而$S=\frac{1}{2}\times3\times\frac{3k}{k^2-1}=\frac{9}{2}\times\frac{1}{k-\frac{1}{k}}$在$k\ge2$上单调递减，

所以$S_{\max}=\frac{1}{2}\times3\times\frac{3k}{k^2-1}=\frac{9}{2}\times\frac{1}{2-\frac{1}{2}}=3$.

二 解答题

9. （本题满分 14 分）已知将函数 $g(x)=\cos x$ 图像上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍（横坐标不变），再将所得到的图像向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度得到函数 $y=f(x)$ 的图像，且关于 x 的方程 $f(x)+g(x)=m$ 在 $[0,2\pi)$ 内有两个不同的解 α,β.

（Ⅰ）求满足题意的实数 m 的取值范围；

（Ⅱ）求 $\cos(\alpha-\beta)$（用含 m 的式子表示）.

【答案】（Ⅰ）$m\in\left(-\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$（Ⅱ）$\cos(\alpha-\beta)=\frac{2m^2}{5}-1$

【解析】（Ⅰ）将 $g(x)=\cos x$ 的图像上的所有点的纵坐标伸长为原来的 2 倍（横坐标不变）得到 $y=2\cos x$ 的图像，再将 $y=2\cos x$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到 $y=2\cos(x-\frac{\pi}{2})$ 的图像，故 $f(x)=2\sin x$； $f(x)+g(x)=2\sin x+\cos x=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)$ …………3 分

（其中 $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}},\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}$），依题意 $\sin(x+\varphi)=\frac{m}{\sqrt{5}}$ 在区间 $[0,2\pi)$ 内有两个不同的解 α,β 当且仅当 $\left|\frac{m}{\sqrt{5}}\right|<1$，故 m 的取值范围是 $\left(-\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$. ………………………………6 分

（Ⅱ）因为 α,β 是方程 $\sqrt{5}\sin(x+\varphi)=m$ 在 $[0,2\pi)$ 内的两个不同的解，

所以 $\sin(\alpha+\varphi)=\frac{m}{\sqrt{5}},\sin(\beta+\varphi)=\frac{m}{\sqrt{5}}$，

当 $1\le m<\sqrt{5}$ 时，$\alpha+\beta=2(\frac{\pi}{2}-\varphi)$，即 $\alpha-\beta=\pi-2(\beta+\varphi)$

当 $-\sqrt{5}<m<1$ 时，$\alpha+\beta=2(\frac{3\pi}{2}-\varphi)$，即 $\alpha-\beta=3\pi-2(\beta+\varphi)$，……………11 分

所以 $\cos(\alpha-\beta)=-\cos 2(\beta+\varphi)=2\sin^2(\beta+\varphi)-1=2(\frac{m}{\sqrt{5}})^2-1=\frac{2m^2}{5}-1$ ……………14 分

10. （本题满分 14 分）已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+a_n^2\left(n\in N^*\right)$，记 $S_n=\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$，$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}$，求 S_n+T_n 的值.

$\because a_{n+1}=a_n+a_n^2 \quad \therefore a_{n+1}=a_n(1+a_n)$

$\therefore \frac{1}{1+a_n}=\frac{a_n}{a_{n+1}} \therefore S_n=\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\cdot\frac{a_3}{a_4}\cdots\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{a_1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_{n+1}}$ ……………7 分

$\because a_{n+1}=a_n(1+a_n) \therefore \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n(1+a_n)}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{1+a_n} \quad \therefore \frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$

$\therefore T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}=1-\frac{1}{a_{n+1}}$

$\therefore S_n+T_n=1$ ……………14 分

11. (本题满分 14 分)如图，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 左焦点为 F，过点 F 的直线交椭圆于 A、B 两点. 当直线 AB 经过椭圆的一个顶点时，其倾斜角恰为 60^0.

(Ⅰ)求该椭圆的离心率；

(Ⅱ)设线段 AB 的中点为 G，AB 的中垂线与 x 轴、y 轴分别交于 D、E 两点，记 ΔGDF 的面积为 S_1，ΔOED (O 为坐标原点)的面积为 S_2，求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的取值范围.

【答案】(Ⅰ) $\frac{1}{2}$ (Ⅱ) $(9,+\infty)$

【解析】(Ⅰ)依题意，当直线 AB 经过椭圆的顶点 $(0,b)$ 时，其倾斜角为 60^0.

设 $F(-c,0)$，则 $\frac{b}{c}=\tan 60^0=\sqrt{3}$.

将 $b=\sqrt{3}c$ 代入 $a^2=b^2+c^2$，得 $a=2c$.

所以椭圆的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$. ……………4 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)知，椭圆的方程可设为 $\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

依题意，直线 AB 不能与 x,y 轴垂直，故设直线 AB 的方程为 $y=k(x+c)$，将其代入

$3x^2+4y^2=12c^2$，整理得 $(4k^2+3)x^2+8ck^2x+4k^2c^2-12c^2=0$． ……………7 分

则 $x_1+x_2=\dfrac{-8ck^2}{4k^2+3}$，$y_1+y_2=\dfrac{6ck}{4k^2+3}$，所以 $G(\dfrac{-4ck^2}{4k^2+3},\dfrac{3ck}{4k^2+3})$． …………9 分

因为 $GD\perp AB$，所以 $\dfrac{\dfrac{3ck}{4k^2+3}}{\dfrac{-4ck^2}{4k^2+3}-x_D}\times k=-1$，$x_D=\dfrac{-ck^2}{4k^2+3}$ ……………11 分

因为 $\Delta GFD\sim\Delta OED$，所以

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{|GD|^2}{|OD|^2}=\frac{(\frac{-4ck^2}{4k^2+3}-\frac{-ck^2}{4k^2+3})^2+(\frac{3ck}{4k^2+3})^2}{(\frac{-ck^2}{4k^2+3})^2}=\frac{(3ck^2)^2+(3ck)^2}{(ck^2)^2}=$$

$\dfrac{9c^2k^4+9c^2k^2}{c^2k^4}=9+\dfrac{9}{k^2}>9$．所以 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的取值范围是 $(9,+\infty)$． ……………14 分

12.（本题满分 14 分）判断曲线 $f(x)=e^{x-1}$ 与曲线 $g(x)=\ln x$ 的公切线的条数，并说明理由．

【答案】两条公切线．

【解析】答：曲线 $f(x)=e^{x-1}$ 与曲线 $g(x)=\ln x$ 有两条公切线． ……………1 分

理由如下：设两曲线的公切线为 l，与曲线 $f(x)=e^{x-1}$ 切于点 (a,e^{a-1})，与曲线 $g(x)=\ln x$ 切于点 $(b,\ln b)$．

则直线 l 的方程既可写为 $y-e^{a-1}=e^{a-1}(x-a)$，即：$y=e^{a-1}x+e^{a-1}-ae^{a-1}$

又可写为 $y-\ln b=\dfrac{1}{b}(x-b)$，即：$y=\dfrac{1}{b}x+\ln b-1$，

因为直线 l 为公切线所以有 $\begin{cases}e^{a-1}=\dfrac{1}{b}\\ e^{a-1}-ae^{a-1}=\ln b-1\end{cases}$， ……………6 分

消元整理得 $e^{a-1}-ae^{a-1}+a=0$，所以方程根的个数即为两曲线的公切线条数．

设 $m(x)=e^{x-1}-xe^{x-1}+x$，$m'(x)=1-xe^{x-1}$，

当$x\in(-\infty,-1)$时$m^{''}(x)>0$，$m'(x)=1-xe^{x-1}$为增函数，

当$x\in(-1,+\infty)$时$m^{''}(x)<0$，$m'(x)=1-xe^{x-1}$为减函数，

而且$x<0$时$m'(x)>1$，$m'(1)=0$，所以$m'(x)=0$的根为$x=1$，　　……………10 分

所以当$x\in(-\infty,1)$时$m'(x)>0$，$m(x)$单调递增，当$x\in(1,+\infty)$时$m'(x)<0$，$m(x)$单调递减，

而$m(1)=1>0, m(2)=2-e<0, m(-1)=\frac{1}{e^2}-1<0, m(0)=\frac{1}{e}>0$，而且函数$m(x)$在$R$上连续，

所以函数$m(x)=e^{x-1}-xe^{x-1}+x$有两个零点，分别位于区间$(-1,0)$和区间$(1,2)$内.

所以方程$e^{a-1}-ae^{a-1}+a=0$有两个不同的根，即两曲线有两条公切线.　…………14 分

13.（本题满分 15 分）已知三棱锥$S-ABC$中侧棱SA、SB、SC互相垂直，M是底面三角形ABC内一动点，直线MS与SA、SB、SC所成的角分别是α、β、γ.

（Ⅰ）证明：α、β、γ不可能是锐角三角形的三个内角；

（Ⅱ）设$S=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}-\frac{2(\cos^3\alpha+\cos^3\beta+\cos^3\gamma)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$，证明：S≥3.

【解析】证明：（Ⅰ）以线段MS为体对角线构造长方体，则α、β、γ恰好为长方体的体对角线与从一个顶点出发的三条棱所成的角，因此$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

$\because \cos^2\alpha+\cos^2\beta=1-\cos^2\gamma \therefore \frac{1}{2}(\cos2\alpha+\cos2\beta)=-\cos^2\gamma$

$\therefore \cos(\alpha+\beta)\times\cos(\alpha-\beta)=-\cos^2\gamma<0 \therefore \cos(\alpha+\beta)<0$

$\therefore \frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$　　……………4 分

下面证明$\alpha+\beta+\gamma<\pi$. 要证$\alpha+\beta+\gamma<\pi$，只需$\alpha+\beta<\pi-\gamma$

只需$\cos(\pi-\gamma)<\cos(\alpha+\beta)<0$，只需$\cos^2(\pi-\gamma)>\cos^2(\alpha+\beta)$

$\because \cos^2(\alpha+\beta)-\cos^2\gamma=\cos^2(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}(\cos2\alpha+\cos2\beta)$

$=\cos^2(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=2\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta<0$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma<\pi$，故$\alpha$、$\beta$、$\gamma$不可能是锐角三角形的三个内角　……………7 分

（Ⅱ）$\because S-3=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\beta}+\dfrac{1}{\cos^2\gamma}-\dfrac{2(\cos^3\alpha+\cos^3\beta+\cos^3\gamma)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}-3$

$=\dfrac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}{\cos^2\beta}+\dfrac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}{\cos^2\gamma}$

$-2\left(\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\gamma}+\dfrac{\cos^2\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\gamma}+\dfrac{\cos^2\gamma}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}\right)-3$

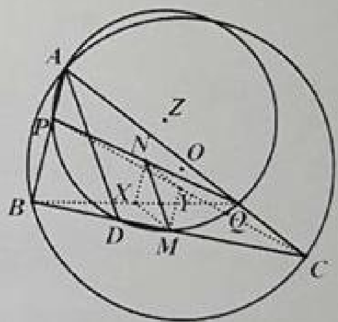
$=\cos^2\alpha\left(\dfrac{1}{\cos^2\beta}+\dfrac{1}{\cos^2\gamma}\right)+\cos^2\beta\left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\gamma}\right)+\cos^2\gamma\left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\beta}\right)$

$-2\left(\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\gamma}+\dfrac{\cos^2\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\gamma}+\dfrac{\cos^2\gamma}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}\right)$

$=\cos^2\alpha\left(\dfrac{1}{\cos\beta}-\dfrac{1}{\cos\gamma}\right)^2+\cos^2\beta\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}-\dfrac{1}{\cos\gamma}\right)^2+\cos^2\gamma\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}-\dfrac{1}{\cos\beta}\right)^2\ge 0$

$\therefore S\ge 3$ ……………15 分

14.（本题满分 15 分）如图，设 ΔABC 的外接圆为 $\odot O$，$\angle BAC$ 的角平分线与 BC 交于点 D，M 为 BC 的中点. 若 ΔADM 的外接圆 $\odot Z$ 分别与 AB、AC 交于 P、Q，N 为 PQ 的中点，证明：$MN // AD$.



【解析】证明：设 $AB=c,BC=a,AC=b$.

在 ΔABC 中，AD 为 $\angle BAC$ 的平分线，

$\therefore \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}\ \therefore \dfrac{BD}{BD+DC}=\dfrac{AB}{AB+AC}\ \therefore \dfrac{BD}{a}=\dfrac{c}{b+c}$

$\therefore BD=\dfrac{ac}{b+c}$ 又 $BM=\dfrac{a}{2}$，

由 $BP\cdot BA=BD\cdot BM$ 得 $BP=\dfrac{BD\cdot BM}{AB}=\dfrac{a^2}{2(b+c)}$.

由 $CQ\cdot CA=CM\cdot CD$ 得 $CQ=\dfrac{a^2}{2(b+c)}$，因此 $CQ=BP$ …………7 分

连接 BQ、PC 并设 X、Y 分别为 BQ、PC 的中点，易证 XN 平行且等于 MY，所以四边形 $NXMY$ 为平行四边形，由 $CQ=BP$ 知 $NX=NY$，所以四边形 $NXMY$ 为菱形. 从而 MN 平分角XNY，又AD平分角BAC，AB平行于NX，AC平行于NY，故MN平行于AD

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信扫一扫，快速关注