长郡中学 2023 年上学期高二期末考试

数学参考答案

一、二、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	A	C	B	B	A	C	BD	BD	BCD	ABD

1. D 【解析】由题意可得 $\complement_U N=\{2,4,8\}$，则 $M\cap(\complement_U N)=\{4\}$. 故选 D.

2. C 【解析】选项 A，B，D 中 m 均可能与平面 α 平行、垂直、斜交或在平面 α 内，故选 C.

3. A 【解析】记 $y=f(x)=\dfrac{2-\ln x^2}{2+\ln x^2}\cdot\sin x, x\in[-\mathrm{e},\mathrm{e}]$，则 $x\neq 0$，且 $x\neq\pm\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

$\therefore f(-x)=\dfrac{2-\ln x^2}{2+\ln x^2}(-\sin x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数，图象关于原点对称，故排除 D，

在区间 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 上，$0<x^2<\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$，$\ln x^2<-2$，

有 $2+\ln x^2<0$，此时 $f(x)<0$，图象在 x 轴下方，

在区间 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right)$ 上，$\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}<x^2<\mathrm{e}^2$，$-2<\ln x^2<2$，

有 $2+\ln x^2>0$，$2-\ln x^2>0$，此时 $f(x)>0$，图象在 x 轴上方，故排除 B，C. 故选 A.

4. C 【解析】$\alpha=0.01$ 时，$x_\alpha=6.635$，则大于 x_α 时相关，不独立，

而 $\chi^2=6.147<x_\alpha=6.635$，所以变量 x 与 y 独立，

但是这个结论犯错误的概率超过 0.01，故 A、B、D 错误，C 正确. 故选 C.

5. B 【解析】由 $\dfrac{x-1}{x-3}<0$，得 $1<x<3$，由 $|x-a|<2$，得 $a-2<x<a+2$，

若“$\dfrac{x-1}{x-3}<0$”是“$|x-a|<2$”的充分而不必要条件，

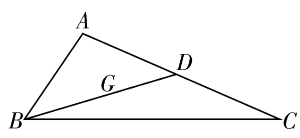
则 $\begin{cases}a+2\geqslant 3,\\ a-2\leqslant 1,\end{cases}$ 等号不同时成立，解得 $1\leqslant a\leqslant 3$，故选 B.

6. B 【解析】在 $\triangle ABC$ 中，$\because|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$，

$\therefore\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2$，$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，即 $AB\perp AC$，

点 G 满足 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$，则 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，设 AC 的中点为 D.

$\therefore$ 向量 $\overrightarrow{BG}$ 在向量 $\overrightarrow{BA}$ 方向上的投影向量为：$\dfrac{2}{3}\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BA}|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}$，



$\because\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{BA}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}^2$，

$\therefore$ 向量 $\overrightarrow{BG}$ 在向量 $\overrightarrow{BA}$ 方向上的投影向量为：$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\overrightarrow{AB}^2}{|\overrightarrow{BA}|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BA}$，故选 B.

7. A 【解析】$\because\alpha,\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，$\therefore\sin\alpha\neq 0$.

由 $(1-\cos 2\alpha)(1+\sin\beta)=\sin 2\alpha\cos\beta$，可得 $2\sin^2\alpha(1+\sin\beta)=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta$，

即 $\sin\alpha(1+\sin\beta)=\cos\alpha\cos\beta$.

$\therefore\sin\alpha=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)$，$\therefore\cos(\alpha+\beta)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$，

$\because\alpha,\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，$\therefore\pi<\alpha+\beta<2\pi$，且 $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{2}-\alpha<0$，

根据函数 $y=\cos x$ 易知：$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha+2\pi$，即得：$2\alpha+\beta=\frac{5\pi}{2}$. 故选 A.

8. C 【解析】由 $a_n\cdot a_{n+1}\cdot a_{n+2}=-\frac{1}{2}$ 得：$a_{n+1}\cdot a_{n+2}\cdot a_{n+3}=-\frac{1}{2}$，

两式相除得：$\frac{a_{n+3}}{a_n}=1$，即 $a_{n+3}=a_n$，所以数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为周期的周期数列，

由 $a_1=-2$，$a_2=\frac{1}{4}$ 得：$a_3=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_1a_2}=1$，记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n，

则 $T_{3k}=\left(-\frac{1}{2}\right)^k\leqslant T_6=\frac{1}{4}$，$T_{3k+1}=a_1\left(-\frac{1}{2}\right)^k=-2\left(-\frac{1}{2}\right)^k\leqslant T_4=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1$，

$T_{3k+2}=a_1a_2\left(-\frac{1}{2}\right)^k=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\leqslant T_5=\frac{1}{4}$，即 $(T_n)_{\max}=1$. 故选 C.

9. BD 【解析】角 α 的终边经过点 $(-1,2)$，可得 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\tan\alpha=-2$，

对于 A，$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-7\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-7}=\frac{-2+1}{-2-7}=\frac{1}{9}$，故 A 错误；

对于 B，$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，故 B 正确；

对于 C，$\tan(\pi-2\alpha)=-\tan 2\alpha=-\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{2\times(-2)}{1-(-2)^2}=-\frac{4}{3}$，故 C 错误；

对于 D，若 α 为钝角，$\tan\alpha=-2<0$，且 $\tan\alpha<\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}<0$，

又因为 $\tan\alpha$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递增，所以 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{2\pi}{3}$，故 D 正确. 故选 BD.

10. BD 【解析】数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=1$，且对于任意的 $m,n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_{m+n}=a_m+a_n+1$，

令 $m=1$ 时，$a_{n+1}=a_n+a_1+1=a_n+2$，则数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公差的等差数列，$a_n=2n-1$，

$S_n=\frac{(1+2n-1)n}{2}=n^2$，$\frac{S_n}{n}=n$，故 A 错误，D 正确；

由等差数列的等和性，B 正确；

$a_m+a_n=2m-1+2n-1=2(m+n)-2=4p-2=a_{2p}-1$，故 C 错误，故选 BD.

11. BCD 【解析】对于 A，因为 $2x+y=1$，所以 $2xy\leqslant\left(\frac{2x+y}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，

则 $xy\leqslant\frac{1}{8}$，当且仅当 $2x=y=\frac{1}{2}$，即 $x=\frac{1}{4}$，$y=\frac{1}{2}$ 时等号成立，

即 xy 的最大值为 $\frac{1}{8}$，故 A 错误；

对于 B，因为 $2x+y=1$，

所以 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)(2x+y)=5+\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{2y}{x}}=9$，

当且仅当 $\frac{2x}{y}=\frac{2y}{x}$，即 $x=y=\frac{1}{3}$ 时等号成立，故 B 正确；

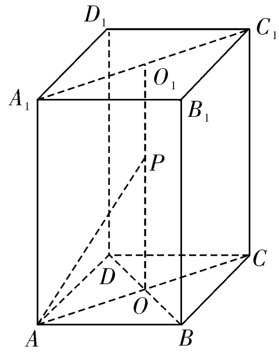
对于 C，因为 $4x^2+y^2=(2x+y)^2-4xy=1-4xy\geqslant 1-4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$，

当且仅当 $2x=y$，即 $x=\frac{1}{4}$，$y=\frac{1}{2}$ 时等号成立，所以 C 正确；

对于 D，$(\sqrt{2x}+\sqrt{y})^2=2x+y+2\sqrt{2xy}\leqslant 1+2\sqrt{2\times\frac{1}{8}}=2$，$\therefore\sqrt{2x}+\sqrt{y}$ 的最大值为 $\sqrt{2}$，

当且仅当 $2x=y=\frac{1}{2}$，即 $x=\frac{1}{4},y=\frac{1}{2}$ 时等号成立，D 正确. 故选 BCD.

12. ABD 【解析】连接 AC、BD 交于点 O，连接 A_1C_1，取 A_1C_1 的中点 O_1，连接 OO_1，当 $a=\frac{1}{2}$ 时，则 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+b\overrightarrow{AA_1}$，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1 /\!/ CC_1$，$AA_1=CC_1$，且 O 为 AC 中点，



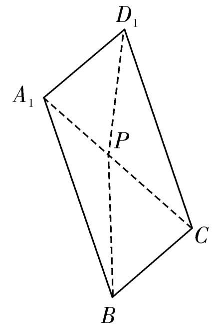
所以四边形 AA_1C_1C 为平行四边形，则 $AA_1 /\!/ OO_1$，

所以 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AO}+b\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AO}+b\overrightarrow{OO_1}$，$b\in(0,1)$，所以点 P 在线段 OO_1 上（不含端点），

在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，则 $AC\perp BD$，$AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $OO_1\perp$ 平面 $ABCD$，

又 $AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AC\perp OO_1$，

因为 $OO_1\cap BD=O$，OO_1、$BD\subset$ 平面 BPB_1，所以 $AC\perp$ 平面 BPB_1，故 A 正确；



当 $a+b=1$ 时，又 $\overrightarrow{AP}=a\overrightarrow{AC}+b\overrightarrow{AA_1}$，$a$、$b\in(0,1)$，

由平面向量基本定理可知，P,A_1,C 三点共线，

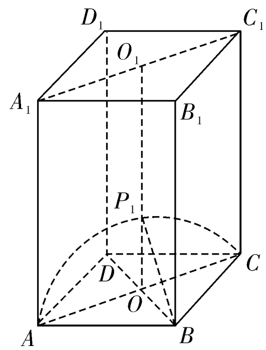
由正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的对称性可知，线段 CA_1 上的点到 B_1,D_1 两点的距离相等，

则 $PB_1=PD_1$，取平面 A_1BCD_1 如图所示，

所以 $PB+PB_1=PB+PD_1\geqslant BD_1=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$，则 $PB+PB_1$ 最小值为 $\sqrt{6}$，故 B 正确；

因为 $\overrightarrow{AP}=a\overrightarrow{AC}+b\overrightarrow{AA_1}$，$a$、$b\in(0,1)$，所以点 P 在平面 AA_1C_1C 内，

由题意知，BA、BC 与 BD 所成角均为 $\frac{\pi}{4}$，在线段 OO_1 上取点 P_1，使得 $OB=OP_1$，



易知 $\angle OBP_1=\frac{\pi}{4}$，$BO=\frac{\sqrt{2}}{2}$，若直线 BP 与 BD 所成角为 $\frac{\pi}{4}$，

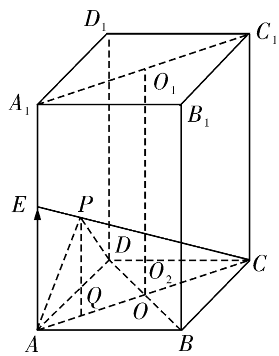
则动点 P 的轨迹是以 O 为圆心，$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径的半圆，如图中虚线所示，

则动点 P 的轨迹长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$，故 C 错误；当 $a+2b=1$ 时，取 AA_1 的中点为 E，则 $\overrightarrow{AA_1}=2\overrightarrow{AE}$，

则 $\overrightarrow{AP}=a\overrightarrow{AC}+b\overrightarrow{AA_1}=a\overrightarrow{AC}+2b\overrightarrow{AE}$，又 $a+2b=1$，所以 P,C,E 三点共线，如图所示，

易知三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心在直线 OO_1 上，

设球心为 O_2，$OO_2=h$，作 $PQ\perp AC$ 于点 Q，设 $PQ=x\in(0,1)$，



易知 $AE=1$，$AC=\sqrt{2}$，则 $CQ=\sqrt{2}x$，$OQ=\left|\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|$，

设三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径为 R，$R>0$，

则 $R^2=h^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left|\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|^2+(x-h)^2$，解得 $h=\left|\frac{3x-2}{2}\right|$，

所以 $R^2=\left|\frac{3x-2}{2}\right|^2+\frac{1}{2}=\frac{9x^2-12x+6}{4}$，$x\in(0,1)$，

易知当 $x=\frac{2}{3}$ 时，R^2 取得最小值 $\frac{1}{2}$，此时 $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$，且 $R^2<\frac{3}{2}$，又 $R>0$，则 $R<\frac{\sqrt{6}}{2}$，

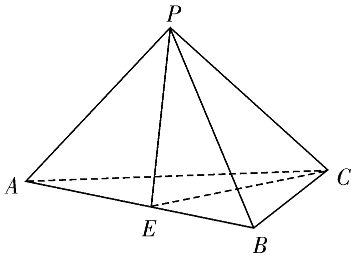
则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，故 D 正确. 故选 ABD.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. $\sqrt{5}$ 【解析】$z=\frac{5i}{2+i}=\frac{5i(2-i)}{(2+i)(2-i)}=1+2i$，则 $|z|=\sqrt{5}$.

14. 1.26 【解析】$1-1.25=2.5(\lg E_{1.25}-\lg E_1)\Rightarrow\frac{E_1}{E_{1.25}}=10^{\frac{1}{10}}\approx1+2.3\times\frac{1}{10}+2.7\times\left(\frac{1}{10}\right)^2=1.257\approx1.26$.

15. 1 【解析】取 AB 中点 E，连接 PE，CE，如图，



$\because\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，$PA=PB=2$，

$\therefore PE\perp AB$，$CE\perp AB$，又 PE，$CE\subset$ 平面 PEC，$PE\cap CE=E$，

$\therefore AB\perp$ 平面 PEC，

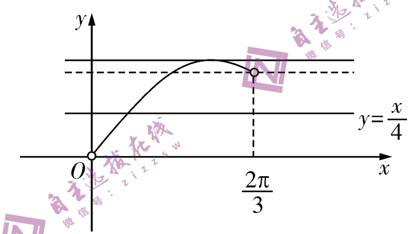
又 $PE=CE=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，$PC=\sqrt{6}$，

故 $PC^2=PE^2+CE^2$，即 $PE\perp CE$，

所以 $V=V_{B\text{-}PEC}+V_{A\text{-}PEC}=\frac{1}{3}S_{\triangle PEC}\cdot AB=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times2=1$.

16. $[0,2\sqrt{3})\cup\{-2\}$ 【解析】由正弦定理，得 $\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$，则 $\sin C=\frac{c}{4}$，$B=\frac{\pi}{3}$，则 $0<C<\frac{2\pi}{3}$，

做正弦曲线如图所示，



则当 $0<\frac{c}{4}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{c}{4}=1$，即 $c=4$ 或 $0<c\leqslant2\sqrt{3}$ 时，$\triangle ABC$ 仅有一解，

当 $c=4$ 时，$a-c=2-4=-2$；当 $0<c\leqslant2\sqrt{3}$ 时，$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=4$，

可得 $a-c=4(\sin A-\sin C)=4\left[\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)-\sin C\right]=4\left[-\frac{1}{2}\sin C+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C\right]=-4\sin\left(C-\frac{\pi}{3}\right)$，

因为 $0<C\leqslant\frac{\pi}{3}$，$-\frac{\pi}{3}<C-\frac{\pi}{3}\leqslant0$，所以 $-\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\left(C-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant0$，

$\therefore a-c=-4\sin\left(C-\frac{\pi}{3}\right)\in[0,2\sqrt{3})$.

即 $a-c$ 的取值范围是 $[0,2\sqrt{3})\cup\{-2\}$.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分.解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17.【解析】(1) 函数 $f(x)=x^3-3ax^2+b$，$f'(x)=3x^2-6ax$，

由 $f(2)=8$，$f'(2)=0$，即 $\begin{cases}8-12a+b=8,\\12-12a=0\end{cases}$ 解得 $a=1$，$b=12$. ………………………………………… 4 分

(2) 已知 $f'(x)=3x^2-6ax$，令 $f'(x)=0$，知 $x_1=0$，$x_2=2a$，

当 $a=0$ 时，$f'(x)\geqslant0$ 恒成立，此时函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 单调递增；

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(2a,+\infty)$ 上单调递增，$(0,2a)$ 上单调递减；

当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,2a)$，$(0,+\infty)$ 上单调递增，$(2a,0)$ 上单调递减. ……………………………… 10 分

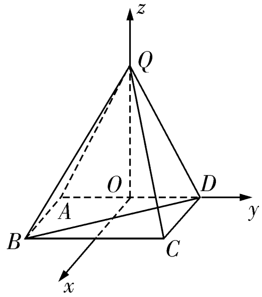
18.【解析】(1) $\triangle QCD$ 中，$CD=AD=2$，$QD=\sqrt{5}$，$QC=3$，

所以 $CD^2+QD^2=QC^2$，所以 $CD\perp QD$；

又 $CD\perp AD$，$AD\cap QD=D$，$AD\subset$平面 QAD，$QD\subset$平面 QAD，所以 $CD\perp$平面 QAD；

又 $CD\subset$平面 $ABCD$，所以平面 $QAD\perp$平面 $ABCD$. …………………………………………………… 5 分

(2)取 AD 的中点 O，在平面 $ABCD$ 内作 $Ox\perp AD$，



以 OD 为 y 轴，OQ 为 z 轴，建立空间直角坐标系 $O-xyz$，如图所示：

则 $O(0,0,0)$，$B(2,-1,0)$，$D(0,1,0)$，$Q(0,0,2)$，

因为 $Ox\perp$平面 ADQ，所以平面 ADQ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$，

设平面 BDQ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\overrightarrow{BD}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{DQ}=(0,-1,2)$，

得 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DQ}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x+2y=0,\\ -y+2z=0\end{cases}$

令 $z=1$，得 $y=2$，$x=2$，所以 $\boldsymbol{n}=(2,2,1)$；

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2+0+0}{1\times\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{2}{3}$，

所以二面角 $B-QD-A$ 的平面角的余弦值为 $\dfrac{2}{3}$. …………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1) $f(x)=4\cos\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\omega x-\cos 2\omega x+1=4\left(\cos\omega x\cos\dfrac{\pi}{6}-\sin\omega x\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\omega x-\cos 2\omega x+1=$

$\sqrt{3}\sin 2\omega x$.

因为 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴，所以 $2\omega\cdot\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

即 $\omega=2k+1$，$k\in\mathbf{Z}$.

又 $0<\omega<2$，所以 $\omega=1$. 所以函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x$，周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$. …………………………… 6 分

(2)函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2\omega x\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

整理得 $-\dfrac{\pi}{4\omega}+\dfrac{k\pi}{\omega}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4\omega}+\dfrac{k\pi}{\omega}$，$k\in\mathbf{Z}$. 依题意函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上为增函数，故取 $k=0$，则有

$\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4\omega}\leqslant-\dfrac{\pi}{6},\\ \dfrac{\pi}{4\omega}\geqslant\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\omega\leqslant\dfrac{3}{2},\\ \omega\leqslant\dfrac{3}{4},\end{cases}$ $\therefore\omega\leqslant\dfrac{3}{4}$，又 $0<\omega<2$，$\therefore\omega$ 的最大值为 $\dfrac{3}{4}$. …………………… 12 分

20.【解析】(1)由已知得 $\dfrac{(a_1+a_9)\times 9}{2}=90$，$\therefore a_5=10$，又 $a_{10}=20$，$5d=10$，所以 $d=2$，

$\therefore a_n=a_{10}+(n-10)d=2n$，$\therefore$数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=2n$；

由条件得 $b_1=2$，$nb_{n+1}=2nb_n$，$\therefore b_{n+1}=2b_n$，即数列 $\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，

$\therefore b_n=2^n$. …………………………………………………………………………………… 5 分

(2)由(1) $\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{2n}{2^n}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$，设数列 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，

则 $T_n=1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{4}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}$，

$\therefore T_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$，

由 $c_{n+1}=c_n-\dfrac{a_n}{b_n}$ 得 $c_{n+1}-c_n=-\dfrac{a_n}{b_n}$，累加得 $c_n-c_1=-T_{n-1}$，

即 $c_n-4=-4+\dfrac{n+1}{2^{n-2}}$ $\therefore c_n=\dfrac{n+1}{2^{n-2}}$，

$\therefore \lambda\geqslant\dfrac{n+1}{2^{n-2}}-\dfrac{3n+9}{2^n}=\dfrac{n-5}{2^n}$，令 $f(n)=\dfrac{n-5}{2^n}$，则 $f(n+1)-f(n)=\dfrac{n-4}{2^{n+1}}-\dfrac{n-5}{2^n}=\dfrac{-n+6}{2^{n+1}}$，

$\therefore f(1)<f(2)<\cdots<f(6)=f(7)>f(8)>\cdots$，

$\therefore f(n)_{\max}=f(6)=f(7)=\dfrac{1}{64}$，$\therefore \lambda\geqslant\dfrac{1}{64}$ ………………………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)设试验一次，“取到甲袋”为事件 A_1，“取到乙袋”为事件 A_2，“试验结果为红球”为事件 B_1，“试验结果为白球”为事件 B_2，

$P(B_1)=P(A_1)P(B_1|A_1)+P(A_2)P(B_1|A_2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{9}{10}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{10}=\dfrac{11}{20}$.

所以试验一次结果为红球的概率为$\dfrac{11}{20}$. ………………………………………………………… 4 分

(2)①因为 B_1，B_2 是对立事件，$P(B_2)=1-P(B_1)=\dfrac{9}{20}$，

所以 $P(A_1|B_2)=\dfrac{P(A_1B_2)}{P(B_2)}=\dfrac{P(B_2|A_1)P(A_1)}{P(B_2)}=\dfrac{\frac{1}{10}\times\frac{1}{2}}{\frac{9}{20}}=\dfrac{1}{9}$，所以选到的袋子为甲袋的概率为$\dfrac{1}{9}$. …… 8 分

②由①得 $P(A_2|B_2)=1-P(A_1|B_2)=1-\dfrac{1}{9}=\dfrac{8}{9}$，

所以方案一中取到红球的概率为 $P_1=P(A_1|B_2)P(B_1|A_1)+P(A_2|B_2)P(B_1|A_2)=\dfrac{1}{9}\times\dfrac{9}{10}+\dfrac{8}{9}\times\dfrac{2}{10}=\dfrac{5}{18}$，

方案二中取到红球的概率为 $P_2=P(A_2|B_2)P(B_1|A_1)+P(A_1|B_2)P(B_1|A_2)=\dfrac{8}{9}\times\dfrac{9}{10}+\dfrac{1}{9}\times\dfrac{2}{10}=\dfrac{37}{45}$，

因为$\dfrac{37}{45}>\dfrac{5}{18}$，所以方案二中取到红球的概率更大. ………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)$f'(x)=\dfrac{x-m}{x^2}(x>0)$，当 $m\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，没有最小值；

当 $m>0$ 时，当 $0<x<m$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>m$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$在$(0,m)$上单调递减，在$(m+\infty)$上单调递增.

$\therefore f(x)_{\min}=f(m)=1+\ln\dfrac{m}{a}=2$，$\therefore\dfrac{m}{a}=\mathrm{e}$. ………………………………………………………… 5 分

(2)①$m=1$，$a>\mathrm{e}$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{x}{a}$，

由(1)可知 $f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$单调递增，

$\therefore f(x)_{\min}=f(1)=1-\ln a$，由于 $f(a)=\dfrac{1}{a}>0$，$\therefore$存在 $x_0\in(1,a)$，使得 $f(x)=\dfrac{1}{x_0}+\ln\dfrac{x_0}{a}=0$，

也即 $\ln a=\dfrac{1}{x_0}+\ln x_0=\ln\left(x_0\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x_0}}\right)$，也即 $a=x_0\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x_0}}$.

要证$\dfrac{1}{2x_0}+x_0<a-1$，只需证$\dfrac{1}{2x_0}+x_0+1<x_0\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x_0}}(x_0>1)$，

设 $t=\dfrac{1}{x_0}\in(0,1)$，则只需证$\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{t}+1<\dfrac{1}{t}\mathrm{e}^t$，即证 $\mathrm{e}^t>\dfrac{1}{2}t^2+t+1(0<t<1)$，

取 $g(t)=\mathrm{e}^t-\dfrac{1}{2}t^2-t-1(0<t<1)$，$\therefore g'(t)=\mathrm{e}^t-t-1>0$，

令 $m(t)=g'(t)$，则 $m'(t)=\mathrm{e}^t-1>0$，$\therefore g'(t)$在$(0,1)$上单调递增，

$\therefore g'(t)>g'(0)=0$，$\therefore g(t)$在$(0,1)$上单调递增，$\therefore g(t)>g(0)=0$.

$\therefore 0<t<1$ 时，$e^t>\frac{1}{2}t^2+t+1$ 成立. 综上，$\frac{1}{2x_0}+x_0<a-1$ 成立. ………………………………………………… 9 分

②证明：$a>e$，$\therefore \ln a>1$，$\therefore 2\ln a-\ln(\ln a)<2\ln a$，

$\therefore$ 只需证 $x_0+\frac{1}{x_0}>2\ln a$，即证 $x_0+\frac{1}{x_0}>2\left(\ln x_0+\frac{1}{x_0}\right)$，即证 $2\ln x_0+\frac{1}{x_0}-x_0<0(x_0>1)$，

取 $h(x)=2\ln x+\frac{1}{x}-x(x>1)$，$\therefore h'(x)=-\frac{(x-1)^2}{x^2}<0$，$\therefore h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

$h(x)<h(1)=0$，故 $x_0+\frac{1}{x_0}>2\ln a$.

综上，$x_0+\frac{1}{x_0}>2\ln a-\ln(\ln a)$ 得证. ………………………………………………………………… 12 分