贵阳市2022年高三适应性考试（二）

理科数学参考答案与评分建议

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	A	A	A	C	D	C	B	B	B	A

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分.

13. 2；　　14. $-\dfrac{3}{2}$；　　15. $(-\infty,-2]$；　　16. $(7-4\sqrt{3})\pi$.

三、解答题：第17至21题每题12分，第22、23题为选考题，各10分.

17. 解：（1）由题得 $S_2S_3=(2a_2)^2$，

设数列$\{a_n\}$的公差为d，则$(2+d)(3+3d)=4(1+d)^2$，

解得$d=-1$或$d=2$.

当$d=-1$时，$a_2=0$不符合题意，舍去.

所以$a_n=1+2(n-1)=2n-1$，$S_n=n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2$.　　--------------------6分

（2）因为$n\geqslant 2$时，$\dfrac{1}{S_n-1}=\dfrac{1}{n^2-1}=\dfrac{1}{(n-1)(n+1)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1})$，

所以$\dfrac{1}{a_2-1}+\dfrac{1}{a_3-1}+\dfrac{1}{a_4-1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n-1}$

$=\dfrac{1}{2}[(1-\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4})+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5})+(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6})+\cdots+(\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n})+(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1})]$

$=\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})\quad<\dfrac{3}{4}$.　　--12分

18. 解：（1）连接AB_1，AD_1.

$\because ABCD-A_1B_1C_1D_1$为棱柱，$\therefore B_1B//D_1D$且$B_1B=D_1D$，

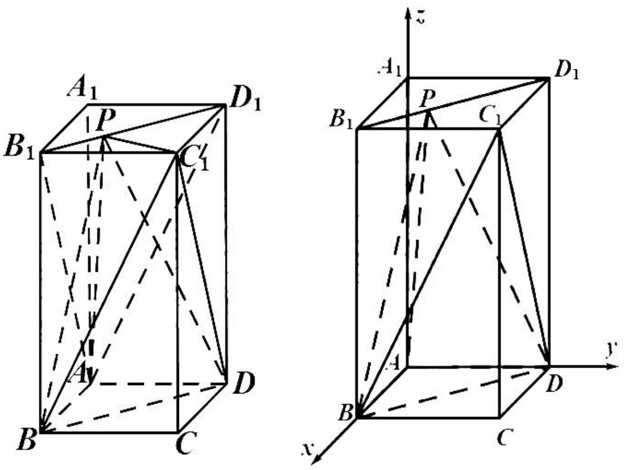
$\therefore$四边形B_1BDD_1为平行四边形，$\therefore B_1D_1//BD$，

又$B_1D_1\subset$平面AB_1D_1，$BD\not\subset$平面AB_1D_1，$\therefore BD//$平面AB_1D_1.

同理$C_1D//$平面AB_1D_1，

又$BD\cap C_1D=D$且$BD,C_1D\subset$平面C_1BD，$\therefore$平面$AB_1D_1//$平面C_1BD，

又$AP\subset$平面AB_1D_1，$\therefore AP//$平面C_1BD.　　----------------------------6分



（2）【法一】$\because AA_1\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$，$\angle ABC=90°$，$\therefore$棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$为长方体．以A为坐标原点，以AB、AD、AA_1分别所在的直线为x、y、z轴建立空间直角坐标系，则　$B(1,0,0)$、$D(0,1,0)$、$C_1(1,1,2)$，

$\therefore \overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{BC_1}=(0,1,2)$．

设$\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$为平面$C_1BD$的法向量，则

$\begin{cases}-x+y=0\\ y+2z=0\end{cases}$，令$x=2$，得$\overrightarrow{n_1}=(2,2,-1)$，

取平面PBD的法向量$\overrightarrow{n_2}=(1,1,0)$，

$\therefore$二面角$P-BD-C_1$的余弦值为$\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{4}{3\times\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$．　---12分

【法二】连接A_1C_1交B_1D_1于O_1，连接AC交BD于O，连接OO_1、OC_1．

$\because AA_1\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$，$\angle ABC=90°$，$\therefore$棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$为长方体．

$\because P\in B_1D_1\subset$平面$B_1BDD_1$，$\therefore$二面角$P-BD-C_1$即半平面$B_1BDD_1$和半平面$C_1BD$所形成的夹角，与$P$点线段$B_1D_1$的位置无关，所以二面角$P-BD-C_1$即二面角$O_1-BD-C_1$．

$\because BC_1=DC_1$，O为BD的中点，$\therefore C_1O\perp BD$．

$\because O_1$和O分别为上下底面的中心，　$\therefore OO_1\perp$平面$ABCD$，　$\therefore OO_1\perp BD$．

$\therefore \angle O_1OC_1$为二面角$O_1-BD-C_1$的平面角．

又$OO_1\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$，$\therefore OO_1\perp O_1C$，

$\therefore \cos\angle O_1OC_1=\dfrac{OO_1}{OC_1}=\dfrac{2}{\sqrt{2^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

即二面角 $P-BD-C_1$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$．　　----------------------------12 分

19．解：（1）若甲指定第一局由乙丙对战，“只进行三局甲就成为冠军”共有两种情况：

① 乙丙比乙胜，甲乙比甲胜，局甲丙比甲胜，其概率为 $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{30}$；

② 乙丙比丙胜，甲丙比甲胜，甲乙比甲胜，其概率为 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{60}$．

所以“只进行三局甲就成为冠军”的概率为 $\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{60}=\dfrac{1}{20}$．　　-----------------6 分

（2）若第一局甲乙比，甲获得冠军的情况有三种：甲乙比甲胜，甲丙比甲胜；甲乙比甲胜，甲丙比丙胜，乙丙比乙胜，甲乙比甲胜；甲乙比乙胜；乙丙比丙胜，甲丙比甲胜，甲乙比甲胜．

所以甲能获得冠军的概率为 $\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{12}$．

若第一局为甲丙比，则同上可得甲获得冠军的概率为

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{11}{120}.$$

若第一局为乙丙比，那么甲获得冠军只能是连赢两局，则甲获得冠军的概率即第（1）问的结果 $\dfrac{1}{20}$．

因为 $\dfrac{11}{120}>\dfrac{1}{12}>\dfrac{1}{20}$，所以甲第一局选择和丙比赛，最终获得冠军的概率最大．-12 分

20．解：（1）由椭圆的对称性知 $2a=|MF|+|NF|=4$，即 $a=2$，

又 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $c=\sqrt{3}$，$b^2=a^2-c^2=1$，

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$．　　------------------------------6 分

（2）将 $y=x+m$ 代入 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 得 $5x^2+8mx+4(m^2-1)=0$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{8m}{5}$，$x_1x_2=\dfrac{4(m^2-1)}{5}$（*），

由（1）得$A(-2,0)$，$B(2,0)$，

所以$\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}=\dfrac{(x_1+m)(x_2-2)}{(x_2+m)(x_1+2)}=\dfrac{x_1x_2-2x_1+mx_2-2m}{x_1x_2+2x_2+mx_1+2m}$

$=\dfrac{x_1x_2+m(x_1+x_2)-(m+2)x_1-2m}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+(m-2)x_1+2m}$，

将（*）式代入上式得$\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{-2(m+2)(2m+1)-5m(m+2)x_1}{2(m-2)(2m+1)-5m(m-2)x_1}=-\dfrac{m+2}{m-2}$，

因为$-1<m<1$，$-\dfrac{m+2}{m-2}=\dfrac{4}{2-m}-1$递增，所以$\dfrac{1}{3}<\dfrac{4}{2-m}-1<3$，

即$\dfrac{k_1}{k_2}$的取值范围是$(\dfrac{1}{3},3)$． ------------------------------12 分

21．解：（1）$\because f'(x)=e^x-a\cos x$，$\therefore f'(0)=1-a$，

又$f(0)=1$，所以$y=f(x)$在$(0,f(0))$处的切线方程为$y=(1-a)x+1$，

因为其也与曲线$y=2x-x^2$相切，则

联立$\begin{cases}y=(1-a)x+1\\y=2x-x^2\end{cases}$，得$x^2-(a+1)x+1=0$，

由$\Delta=(a+1)^2-4=0$及$a>0$，解得$a=1$． ---------------6 分

（2）由（1）得$f(x)=e^x-\sin x$，$f'(x)=e^x-\cos x$，

当$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$无极大值点．

当$x\in(-\dfrac{\pi}{2},0)$时，令$g(x)=f'(x)$，则$g'(x)=e^x+\sin x$在$(-\dfrac{\pi}{2},0)$上递增，

又$g'(-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1}{e^{\frac{\pi}{4}}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<0$，$g'(0)=1>0$，

所以存在$x_1\in(-\dfrac{\pi}{4},0)$，使得$g'(x_1)=0$，即$e^{x_1}+\sin x_1=0$，

当$x\in(-\dfrac{\pi}{2},x_1)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$递减；当$x\in(x_1,0)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$递增，

又$g(x_1)=e^{x_1}-\cos x_1=-\sin x_1-\cos x_1=-\sqrt{2}\sin(x_1+\dfrac{\pi}{4})<0$，$g(0)=f'(0)=0$，

所以当$x\in(x_1,0)$时，$g(x)<0$，即$f'(x)<0$，

所以$x=0$是$f(x)$的极小值点，$f(x)$在$(x_1,0)$内无极大值点．

$\because g(-\frac{\pi}{2})=e^{-\frac{\pi}{2}}>0$，$g(-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{e^{\frac{\pi}{3}}}-\frac{1}{2}<0$，

所以存在$x_0\in(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3})$，使得$g(x_0)=0$，即$f'(x_0)=0$，即$e^{x_0}-\cos x_0=0$，

当$x\in(-\frac{\pi}{2},x_0)$时，$f'(x)>0$；当$x\in(x_0,x_1)$时，$f'(x)<0$，

所以x_0是$f(x)$的极大值点，也是$f(x)$的最大的极大值点.

因为$f(x)$在$(x_0,0)$上递减，所以$f(x_0)>f(0)=1$，

$$f(x_0)=e^{x_0}-\sin x_0=\cos x_0-\sin x_0=\sqrt{2}\cos(x_0+\frac{\pi}{4})<\sqrt{2}\cos(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

所以$1<f(x_0)<\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. --------------12 分

22．解：（1）曲线C的直角坐标方程为$(x-1)^2+y^2=1,(y>0)$；

曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=1+\cos 2\theta\\ y=\sin 2\theta\end{cases}$（$\theta$为参数，$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$）. --------------------5 分

（2）设点M的直角坐标为$(1+\cos 2\theta,\sin 2\theta)$，

则$\sqrt{(1+\cos 2\theta-3)^2+(\sin 2\theta-0)^2}=\sqrt{3}$，化简得$\cos 2\theta=\frac{1}{2}$，

因为$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以$\theta=\frac{\pi}{6}$，

代入$\rho=2\cos\theta$得$\rho=\sqrt{3}$，

所以点M到原点O的距离为$\sqrt{3}$. --------------------------10 分

注：C的参数方程也可为$\begin{cases}x=2\cos^2\theta\\ y=\sin 2\theta\end{cases}$、$\begin{cases}x=\dfrac{2}{1+\tan^2\theta}\\ y=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\end{cases}$（$\theta$为参数，$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$）.

23．解：（1）因为$(a^2-b^2)(c^2-d^2)-(ac-bd)^2$

$=(a^2c^2-b^2c^2-a^2d^2+b^2d^2)-(a^2c^2-2abcd+b^2d^2)$

$=-b^2c^2+2abcd-a^2d^2$

$=-(bc-ad)^2\leqslant 0$，

所以$(a^2-b^2)(c^2-d^2)\leqslant(ac-bd)^2$，当且仅当$bc=ad$时取等号. -------------5 分

（2）由（1）可得$[x^2-(2y)^2]\cdot[(\sqrt{3})^2-(-1)^2]\leqslant[\sqrt{3}x-(-2y)]^2$，

所以$(\sqrt{3}x+2y)^2\geqslant 2$，即$\left|\sqrt{3}x+2y\right|\geqslant\sqrt{2}$，

当且仅当$2y\cdot\sqrt{3}=(-1)\cdot x$时取等号.

由$\begin{cases}x=-2\sqrt{3}y\\x^2-4y^2=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\\y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\end{cases}$或$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\\y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\end{cases}$.

综上，$\left|\sqrt{3}x+2y\right|$的最小值为$\sqrt{2}$，此时$x,y$的值为$\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\\y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\end{cases}$或$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\\y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\end{cases}$.

--10 分