理科数学参考答案

1~12：CBAAA　BCDAA　BA

13. 1　　14. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　15. 2.8　16. $(\sqrt{2}+1)\pi$

17. 解：（1）由题中表格可得 2×2 列联表如下：

	阅读爱好者	非阅读爱好者	合计
男生	45	10	55
女生	30	15	45
合计	75	25	100

……………………………………………………………………………………………2 分

由题意得 $K^2=\frac{100\times(45\times15-30\times10)^2}{25\times75\times55\times45}\approx3.03<3.841$

……………………………………………………………………………………………5 分

所以在犯错误的概率不超过 0.05 的前提下，不能认为“阅读爱好者”与性别有关.

……………………………………………………………………………………………6 分

（2）根据检测得分不低于 80 分的人称为“阅读达人”，则这 100 名学生中的男生“阅读达人”中，按分层抽样的方式抽取，$[80,90)$ 内应抽取 3 人，$[90,100]$ 内应抽取 2 人，…………………………7 分

所以，X 的取值为 0，1，2

$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$，$P(X=1)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，$P(X=2)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$ …………………………10 分

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

……………………………………………………………………………11 分

$E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$

所以 X 的数学期望是 $\frac{6}{5}$ ……………………………………………………………12 分

18. 解：（1）$\because S_n=a_{n+1}-2^n$

$\therefore S_n=S_{n+1}-S_n-2^n$ ……………………………………1 分

$\therefore S_{n+1}=2S_n+2^n$

$\therefore \frac{S_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{S_n}{2^n}=\frac{1}{2}$ ……………………………………………………………………3 分

又 $\because a_1=1$，$\therefore \frac{S_1}{2}=\frac{1}{2}$ ……………………………………………………………………4 分

所以数列 $\left\{\frac{S_n}{2^n}\right\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项和公差的等差数列. ……………………………5 分

（2）由（1）知：$\frac{S_n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n}{2}$

所以 $S_n=n\cdot 2^{n-1}$ ……………………………………6 分

$\therefore a_{n+1}=S_n+2^n=(n+2)2^{n-1}$

$\therefore a_n=(n+1)2^{n-2}(n\geq 2)$

又 $a_1=1$ 满足上式

$\therefore a_n=(n+1)2^{n-2}(n\in N^*)$ ……………………………8 分

因为 $\forall n\in N^*$，$(n-6)a_n\geq\lambda 2^n$

所以 $(n-6)(n+1)2^{n-2}\geq\lambda 2^n$

所以 $\forall n\in N^*,\frac{(n-6)(n+1)}{4}\geq\lambda$ ……………………9 分

记 $f(n)=\frac{(n-6)(n+1)}{4}(n\in N^*)$

则只需 $f(n)_{\min}\geq\lambda$ ……………………………10 分

又 $f(n)$ 在 $\left(1,\frac{5}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

又因为 $n\in N^*$

所以 $f(n)_{\min}=f(2)=f(3)=-3$

所以 $\lambda\leq -3$

所以 λ 的最大值为 -3 ……………………………12 分

19.（1）证明：连接 AO

$\because O$ 为 BC 中点，ΔABC 为等边三角形

$\therefore AO\perp BC$

$\because$ 点 P 在底面 ABC 上的射影为点 O

$\therefore PO\perp$ 面 ABC

$\therefore PO\perp BC$ ……………………………2 分

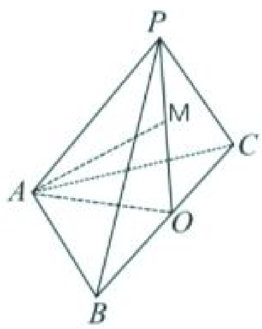
由 $BC\perp AO$，$BC\perp PO$，$AO\cap PO=O$，

$AO\subset$ 面 APO，$PO\subset$ 面 APO

得 $BC\perp$ 面 APO ……………………………4 分

$\because AM\subset$ 面 APO

$\therefore BC\perp AM$ ……………………………5 分



第 19 题(1)

（2）由已知及（1）可知，OB，OA，OP 两两互相垂直

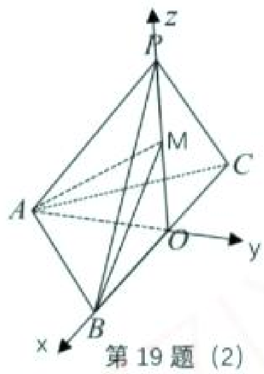
$\therefore$ 以 OB，AO，OP 所在直线分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，……………………………6 分

则 $A(0,-3,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$

$\because BO$ 为 PB 在底面 ABC 上的射影

$\therefore\angle PBO$ 为 PB 与面 ABC 所成角，

$\therefore\angle PBO=\frac{\pi}{3}$，$\therefore PO=3$，……………………………7 分



第 19 题 (2)

$\therefore P(0,0,3)$，假设符合题意的点 M 存在，且设 $M(0,0,c)(0<c<3)$

设 $\vec{m}=(x,y,z)$ 为面 PAB 的法向量，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\vec{m}=0$，$\overrightarrow{PB}\cdot\vec{m}=0$

$\because \overrightarrow{PA}=(0,-3,-3)$，$\overrightarrow{PB}=(\sqrt{3},0,-3)$

$\therefore \begin{cases}-3y-3z=0\\ \sqrt{3}x-3z=0\end{cases}$，令 $y=1$，则 $\vec{m}=(-\sqrt{3},1,-1)$ ……………………………………8 分

设 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$ 为面 MAB 的法向量，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$，$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

$\because \overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},3,0)$，$\overrightarrow{AM}=(0,3,c)$

$\therefore \begin{cases}\sqrt{3}x_1+3y_1=0\\ 3y_1+cz_1=0\end{cases}$，令 $y_1=1$，则 $\vec{n}=\left(-\sqrt{3},1,-\frac{3}{c}\right)$ ……………………………9 分

$\because$ 二面角 $P-AB-M$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\therefore \left|\cos<\vec{m},\vec{n}>\right|=\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ………………………………………………………………10 分

$\therefore \left|\dfrac{3+1+\frac{3}{c}}{\sqrt{5}\sqrt{4+\frac{9}{c^2}}}\right|=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，化简得 $4c^2-48c+63=0$

解得 $c=\frac{3}{2}$ 或 $c=\frac{21}{2}$（舍）…………………………………………………………11 分

$\therefore M\left(0,0,\frac{3}{2}\right)$ 符合题意，此时点 M 为 PO 的中点.………………………………12 分

20.【解】(1) 将 $A(-2,0),B(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 代入椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 中，

$\frac{2^2}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}=1$ ……………………………………………………………………………1 分

$\frac{3}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1$ ……………………………………………………………………………2 分

得 $a=2,b=\sqrt{3}$，…………………………………………………………………………………3 分

故椭圆 C 方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.………………………………………………………………4 分

(2) 设直线 $l:y=kx+m,P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，……………………………………………5 分

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ 3x^2+4y^2=12\end{cases}\Rightarrow(4k^2+3)x^2+8kmx+4m^2-12=0$ 得，

$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{-8km}{4k^2+3}\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{4m^2-12}{4k^2+3}\end{cases}$，……………………………………………………………………6 分

$\Delta=64k^2m^2-4(4k^2+3)(4m^2-12)=192k^2-48m^2+144$，

又 $k_1=\frac{y_1}{x_1+2}=\frac{kx_1+m}{x_1+2},k_2=\frac{kx_2+m}{x_2+2}$，

故 $k_1+k_2=\dfrac{kx_1+m}{x_1+2}+\dfrac{kx_2+m}{x_2+2}=\dfrac{2kx_1x_2+2k\left(x_1+x_2\right)+m\left(x_1+x_2\right)+4m}{x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)+4}$

$=\dfrac{8km^2-24k-16k^2m-8km^2+16k^2m+12m}{4m^2-12-16km+16k^2+12}$

$=\dfrac{3m-6k}{m^2-4km+4k^2}$，……8 分

由 $k\cdot k_1+k\cdot k_2+3=0$，得 k（k_1+k_2）$+3=0$，得 $m^2-3km+2k^2=0$，

故 $(m-2k)(m-k)=0\Rightarrow m=2k$ 或 $m=k$，……9 分

①当 $m=2k$ 时，直线 $l:y=kx+2k=k(x+2)$，过定点 $A(-2,0)$，与已知不符，舍去；……10 分

②当 $m=k$ 时，直线 $l:y=kx+k=k(x+1)$，过定点 $(-1,0)$，即直线 l 过左焦点，

此时 $\Delta=192k^2-48m^2+144=144k^2+144>0$，符合题意.

所以△FPQ 的周长为 $4a=8$.……12 分

21. 解：（1）由题知：$h(x)=\dfrac{x}{e^x}-\ln x+x$，其定义域为 $(0,+\infty)$

$\therefore h'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}-\dfrac{1}{x}+1=\dfrac{(x-1)(e^x-x)}{xe^x}$ ……1 分

令 $\varphi(x)=e^x-x(x>0)$，则 $\varphi'(x)=e^x-1>0$

$\therefore \varphi(x)=e^x-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

$\therefore \varphi(x)>\varphi(0)=1>0$

$\therefore e^x-x>0$ ……3 分

设 $h'(x)>0\Rightarrow x>1$，$h'(x)<0\Rightarrow 0<x<1$

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减……4 分

$h(x)_{\min}=h(1)=\dfrac{1}{e}+1$ ……5 分

（2）设 $F(x)=f(x)+g(x)=\dfrac{x}{e^{ax}}+\ln x-ax$

$=e^{\ln x-ax}+\ln x-ax$

设 $t=\ln x-ax$，则，易知 $G(t)=e^t+t$ 在 R 上单调递增

要使方程 $f(x)+g(x)=0$ 有两个不同的实根，则函数 $G(t)=e^t+t$ 存在 1 个零点……6 分

所以函数 $t=\ln x-ax$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在2个零点，设为 x_1,x_2，且 $0<x_1<x_2$，则

$a\neq 0$ 且 $\ln x_1-ax_1=0,\ln x_2-ax_2=0$

所以 $\ln x_1-\ln x_2=a(x_1-x_2)$ 即 $\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=\dfrac{1}{a}$ ……7 分

要证 $x_1+x_2>\dfrac{2}{a}$，即证 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{x_1+x_2}{2}$

即证

$\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2} \Leftrightarrow \frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}>\frac{\ln x_1-\ln x_2}{2} \Leftrightarrow \frac{\frac{x_1}{x_2}-1}{\frac{x_1}{x_2}+1}>\frac{\ln\frac{x_1}{x_2}}{2}$ ……………………8 分

设 $\frac{x_1}{x_2}=m, m\in(0,1)$，设 $\varphi(m)=\frac{m-1}{m+1}-\frac{\ln m}{2}$

所以 $\varphi'(m)=\frac{2}{(m+1)^2}-\frac{1}{2m}=\frac{-(m-1)^2}{2m(m+1)^2}<0$

所以 $\varphi(m)$ 在 $(0,1)$ 单调递减

所以 $\varphi(m)>\varphi(1)=0$，即 $\frac{m-1}{m+1}-\frac{\ln m}{2}>0$

故 $\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$ ……………………10 分

所以 $\frac{1}{a}<\frac{x_1+x_2}{2}$，即 $x_1+x_2>\frac{2}{a}$. ……………………12 分

22. 解：（1）由 $\rho^2=\frac{6}{\cos2\theta+2}$ 得 $\rho^2\cos2\theta+2\rho^2=6$.

$\therefore \rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2(x^2+y^2)=6$

$\therefore x^2-y^2+2x^2+2y^2=6$

$\therefore 3x^2+y^2=6$

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1$. ……………………5 分

（2）设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=-1+\frac{\sqrt2}{2}m \\ y=1+\frac{\sqrt2}{2}m \end{cases}$（$m$ 为参数）

将 l 的参数方程代入曲线 C 的普通方程，整理得：$m^2-\sqrt2m-1=0$，

$\therefore m_1+m_2=\sqrt2, m_1m_2=-1$， ……………………8 分

$\therefore |AB|=|m_1-m_2|=\sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}=\sqrt{2+4}=\sqrt6$. ……………………10 分

23. 解：（1）化简得：$f(x)=|x-a|+|x-2a+1|$.

当 $a=3$ 时，$f(x)=|x-3|+|x-5|\ge|(x-3)-(x-5)|=2$，

当 $3\le x\le5$ 时等号成立，所以 $f(x)$ 的最小值为 2；……………………5 分

（2）由基本不等式：$m\sqrt{12-2m}=\sqrt{m\cdot m\cdot(12-2m)}\le\sqrt{(\frac{m+m+12-2m}{3})^3}=8$，

当且仅当 $m=12-2m$，即 $m=4$ 时，等号成立.

又因为 $f(x)=|x-a|+|x-2a+1|\ge|(x-a)-(x-2a+1)|=|a-1|$，

当且仅当 $(x-a)(x-2a+1)\le0$ 时，等号成立. ……………………8 分

所以，$|a-1|>8$

$\therefore a-1>8$ 或 $a-1<-8$

$\therefore a>9$ 或 $a<-7$ ……………………10 分

注：第 17—23 题提供的解法供阅卷时评分参考，考生其它解法可相应给分。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。