宁波市2022学年第二学期九校联考高二数学参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8
D	B	B	A	C	A	D	B

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9	10	11	12
BC	BD	BCD	ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13	14	15	16
100	$\sqrt{2}-1$；$5\sqrt{2}-5$	$\left(1,\frac{4}{3}\right]$	$2\sqrt{5}-3$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．解：

（1）若选①：$\because c\sin\frac{B+C}{2}=c\sin\frac{\pi-A}{2}=c\cos\frac{A}{2}$．

$\therefore c\cos\frac{A}{2}=a\sin C$． --1 分

$\therefore \sin C\cos\frac{A}{2}=\sin A\sin C$． --3 分

$\therefore \cos\frac{A}{2}=\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$．　　$\therefore \sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$．

又 $0<A<\pi$，故 $0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}$，故 $\frac{A}{2}=\frac{\pi}{6}$，解得 $A=\frac{\pi}{3}$． --5 分

若选②：$\because S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(b^2+c^2-a^2\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}bc\cos A$． --2 分

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}bc\cos A=\frac{1}{2}bc\sin A$．　　$\therefore \sqrt{3}\cos A=\sin A$． --4 分

$\therefore \tan A=\sqrt{3}$，故 $A=\frac{\pi}{3}$． --5 分

（2）$\because 2CD=BD=AD$．　　$\therefore AD=\frac{2}{3}a$ 且 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$．

$\therefore \overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$．

$\therefore \frac{4}{9}a^2=\frac{1}{9}c^2+\frac{4}{9}b^2+\frac{2}{9}bc$，即 $4a^2=c^2+4b^2+2bc$．①---7 分

又由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-bc$．②

联立①②可得 $c=2b$，$a=\sqrt{3}b$．---9 分

从而 $a^2+b^2=c^2$，故$\triangle ABC$ 是直角三角形．--10 分

18．解：

（1）$f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$．

Q $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{8}$ 对称．

$\therefore \frac{\pi}{8}\omega+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，解得 $\omega=8k+2,k\in Z$．

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 时，$\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{4}\right)$．

Q $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上没有最小值．

$\therefore \frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{2}$，解得 $\omega\le\frac{15}{2}$．

又 $\omega>0$，所以 $\omega=2$，所以 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$．---4 分

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in Z)$，

解得 $-\frac{3\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{8}+k\pi\ (k\in Z)$．

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $\left[-\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{\pi}{8}+k\pi\right](k\in Z)$．--6 分

（2）Q 任意 $x_1\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，均存在 $x_2\in[0,2]$，使得 $f(x_1)\le g(x_2)$．

$\therefore f(x_1)_{\max}\le g(x_2)_{\max}$．--7 分

Q $x_1\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$．　　$\therefore 2x_1+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$．　　$\therefore f(x_1)_{\max}=1$．

又Q $g(x)=\log_a\left(2a^x-4a+2\right)$（$a>0$ 且 $a\ne1$）在定义域上是增函数．

$\therefore g(x)_{\max}=g(2)=\log_a\left(2a^2-4a+2\right)\ge1$．---9 分

$\therefore \begin{cases}a>1\\2a^2-4a+2\ge a\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0<a<1\\2a^2-4a+2\le a\end{cases}$

$\therefore a\ge2$ 或 $\frac{1}{2}\le a<1$．---12 分

19．解：

（1）（i）证明：$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=\sum_{i=1}^{n}\left(x_iy_i-x_i\overline{y}-\overline{x}y_i+\overline{x}\,\overline{y}\right)$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y}-\sum_{i=1}^{n}\overline{x}y_i+\sum_{i=1}^{n}\overline{x}\overline{y}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\overline{y}\sum_{i=1}^{n}x_i-\overline{x}\sum_{i=1}^{n}y_i+\sum_{i=1}^{n}\overline{x}\overline{y}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\overline{y}\left(n\overline{x}\right)-\overline{x}\left(n\overline{y}\right)+n\overline{x}\overline{y}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}\text{，}$$

在上式中分别用 $x_i,\overline{x}$ 替代 $y_i,\overline{y}$，得 $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2$，

同理，也有 $\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2$，

故样本相关系数 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2}}$. --4 分

（ii）可知 $\overline{x}=\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=76$，$\overline{y}=\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}y_i=73$.

$$\therefore\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-10\overline{x}\overline{y}\approx 53620-10\times 76\times 73=-1860\text{，}$$

$$\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\overline{x}^2\approx 58150-10\times 76^2=390\text{，}$$

$$\sum_{i=1}^{10}y_i^2-10\overline{y}^2\approx 64810-10\times 73^2=11520\text{，}$$

$$\therefore r=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-10\overline{x}\overline{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\overline{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{10}y_i^2-10\overline{y}^2}}\approx\frac{-1860}{\sqrt{390}\times\sqrt{11520}}=-\frac{62}{\sqrt{13}\times\sqrt{384}}$$

$$\approx-\frac{62}{70}\approx-0.89$$

故顾客投诉次数与航班正点率之间的线性相关程度很强. -------------------------------------8 分

（2）$\hat{a}=5\overline{x}+\overline{y}=5\times 76+73=453$. ---10 分

令 $\hat{y}=-5x+453\le 60$，得 $x\ge 78.6$.

即该公司的航班正点率应达到 78.6%. ---12 分

20．解：

（1）P（甲队晋级）$=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{16}$，$P$（乙队晋级）$=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{5}$.

X 的可能取值为 $0,1,2$.

$$P\left(X=0\right)=\left(1-\frac{9}{16}\right)\times\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{21}{80}.$$

$P(X=1)=\left(1-\frac{9}{16}\right)\times\frac{2}{5}+\frac{9}{16}\times\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{41}{80}$.

$P(X=2)=\frac{9}{16}\times\frac{2}{5}=\frac{9}{40}$.

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{21}{80}$	$\frac{41}{80}$	$\frac{9}{40}$

--4 分

$\therefore E(X)=0\times\frac{21}{80}+1\times\frac{41}{80}+2\times\frac{9}{40}=\frac{77}{80}$. --6 分

（2）记事件 $A=$ “甲队获得冠军”，$B=$ “该题由甲队抢到答题权”.

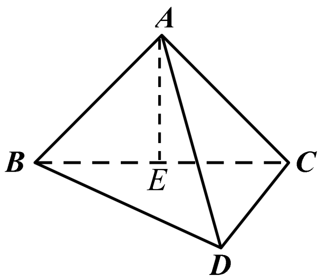
$P(A)=P(B)P(A\mid B)+P(\overline{B})P(A\mid\overline{B})=\frac{2}{3}\times\frac{9}{16}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{23}{40}$. ------------------------------------9 分

故

$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{9}{16}}{\frac{23}{40}}=\frac{15}{23}$. ---------

-----------------------------------12 分

21．解：



（1）过点 A 作 $AE\perp BC$，垂足为 E.

∵ 平面 $ABC\perp$ 平面 BCD，

平面 $ABC\cap$ 平面 $BCD=BC$，

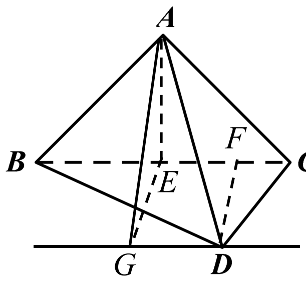
$AE\perp BC$， $AE\subset$ 平面 ABC.

$\therefore AE\perp$ 平面 BCD. $\therefore AE\perp CD$.

∵ $AD\perp AB$， $AB\perp AC$， $AC\cap AD=A$.

$\therefore AB\perp$ 平面 ACD. $\therefore AB\perp CD$.

又 $AE\cap AB=A$， 故 $CD\perp$ 平面 ABC. --4 分



（2）过点 D 作 $DF\perp BC$，垂足为 F.

∵ 平面 $ABC\perp$ 平面 BCD，

平面 $ABC\cap$ 平面 $BCD=BC$，

$DF\perp BC$， $DF\subset$ 平面 BCD.

$\therefore DF\perp$ 平面 ABC.

$\therefore \angle DBC$ 是 BD 与平面 ABC 所成的角.

∵ 在 $\triangle ABC$ 中， $\frac{CD}{\sin\angle DBC}=\frac{BC}{\sin\angle BDC}$，

即 $\frac{1}{\sin\angle DBC}=\frac{2}{\sin\angle BDC}$.

$\therefore$ 当 $\sin\angle BDC=1$ 即 $CD\perp BD$ 时， $\sin\angle DBC$ 最大，

故 $\angle DBC$ 最大，此时 $\angle DBC=30^\circ$. ---7 分

记 $l=\alpha\cap$ 平面 BCD．过点 E 作 $EG\perp l$，垂足为 G，连结 AG．

$\because BC//\alpha$，$BC\subset$ 平面 BCD，$l=\alpha\cap$ 平面 BCD．

$\therefore l//BC$．故平面 ADG 就是平面 α．--9 分

$\because AE\perp$ 平面 BCD．　　$\therefore AE\perp l$．

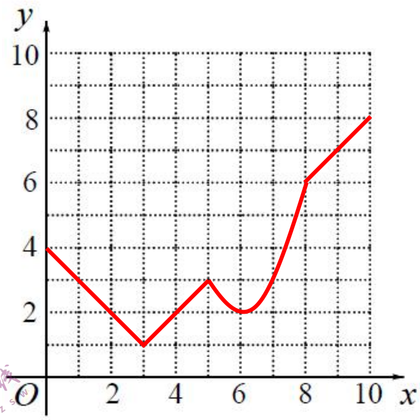
$\because EG\perp l$，$EG\cap AE=E$．

$\therefore l\perp$ 平面 AGE．　$\therefore l\perp AG$．

$\therefore\angle AGE$ 是平面 α 与平面 BCD 的夹角.

$\because \tan\angle AGE=\dfrac{AE}{GE}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$．

$\therefore \cos\angle AGE=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$．------------------------12 分



22．解：

（1）若 $t=3$，则 $f(|x-t|)=|x-3|+1$，

$g(|x-2t|)=(x-6)^2+2=x^2-12x+38$．

$\therefore m(x)=\min\{|x-3|+1,x^2-12x+38\}$．

令 $x-2=x^2-12x+38$，

得 $x_1=5$，$x_2=8$．

故函数 $m(x)$ 的图象如右图所示．----------2 分

$\therefore m(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty,3)$，$(5,6)$，

单调增区间为 $(3,5)$，$(6,+\infty)$．------------4 分

（2）$\because f(x)_{\min}=1$，$g(x)_{\min}=2$．

$\therefore m(x)_{\min}=1$．

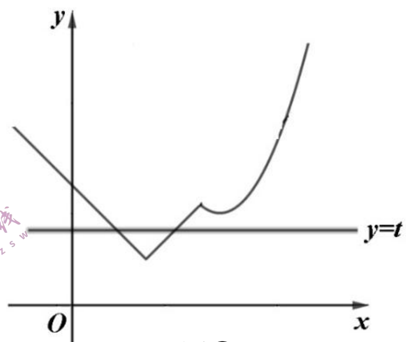
$\therefore$ 不等式 $m(x)<t$ 有解的必要条件是 $t>1$．

①当 $1<t\le 2$ 时，如图①所示，

令 $m(x)<t$，即 $f(x)<t$，

得 $D=(1,2t-1)$．

$\therefore L(D)=2t-2\le 2$，不符合题意.



图①

--6 分

当 $t>2$ 时，令 $x-t+1=g(x)$，得 $x^2-(4t+1)x+4t^2+t+1=0$．

解得 $x_1=\dfrac{4t+1-\sqrt{4t-3}}{2}$，$x_2=\dfrac{4t+1+\sqrt{4t-3}}{2}$．

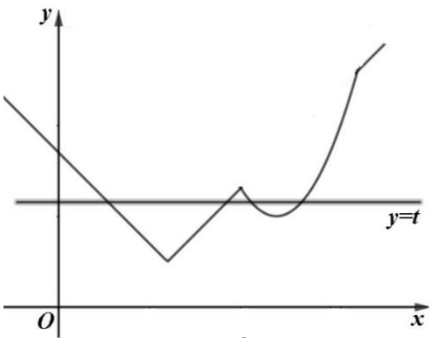
令 $x_1-t+1=t$，得 $t=3$．

②当 $2<t\le 3$ 时，如图②所示，

$f(x)<t$ 的解集为 $(1,2t-1)$，

$g(x)<t$ 的解集为 $(2t-\sqrt{t-2},2t+\sqrt{t-2})$，

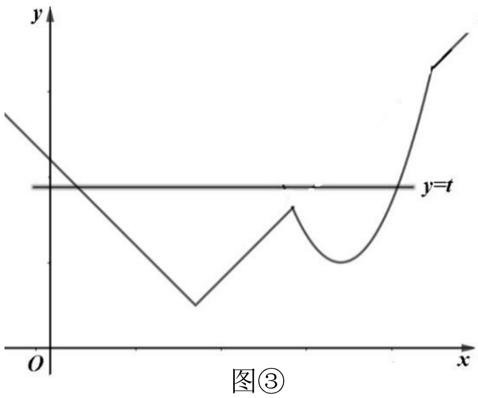
此时 $L(D)=2t-2+2\sqrt{t-2}$．



图②

令 $L(D)=6$，解得 $t=3$． ----------------9 分

③当 $t>3$ 时，如图③所示，



图③

$\because 2t+\sqrt{t-2}-x_2$

$=2t+\sqrt{t-2}-\dfrac{4t+1+\sqrt{4t-3}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{4t-4}-\sqrt{4t-3}-1}{2}<0$

$\therefore 2t+\sqrt{t-2}<x_2$

令 $m(x)<t$，得 $D=\left(1,2t+\sqrt{t-2}\right)$．

$\therefore L(D)=2t+\sqrt{t-2}-1$．

令 $L(D)=6$，解得 $t=3$ 或 $t=\dfrac{17}{4}$，均舍去．

综上所述，$t=3$． --12 分