2023年普通高等学校招生全国统一考试压轴卷(T8联盟)

数学试题(一)
参考答案及多维细目表

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	C	B	B	D	B	B	AD	ACD	ACD	ABC

1.【答案】C

【解析】选项A,∵集合A为滑冰三个小项构成的集合,其中包含了短道速滑,∴短道速滑属于集合A,不属于集合A相对于全集U的补集,故A正确;

选项B,∵“雪车”与“滑雪”是不同的大项,∴交集为空集,故B正确;

选项C,∵冰壶、滑冰是为不同大项,交集为空集,速度滑冰又是滑冰的小项,∴速度滑冰与冰壶交集为空集,故C错误;

选项D,∵全集U包含冬奥会的所有项目,

∴全集U包含滑冰,故D正确.故选C.

2.【答案】D

【解析】∵$z(1+i)^2=1-i$,∴$z=\frac{1-i}{(1+i)^2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$,∴$\bar{z}$的虚部为$\frac{1}{2}$,故选D.

3.【答案】C

【解析】由题可知,$f(x)=|\sin \pi x|$的最小正周期为1,$g(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$的最小正周期为4,∵$\varphi(x)=f(x)$,$x\in\{x|f(x)\neq g(x)\}$,∴$\varphi(x)$的最小正周期为4.故选C.

4.【答案】B

【解析】∵$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PA}=0$,∴$P$在以$F_1A$为直径的圆上,该圆与椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$有三个公共点,又$P$点与$A$点不重合,故符合条件的点$P$的个数有2个,故选B.

5.【答案】B

【解析】由图象可知$f(0)=0$,∴排除D选项;又图象不关于原点对称,∴$f(x)$不是奇函数,$f(x)=x\cos[\pi(x+1)]=-x\cos \pi x$,是奇函数,∴排除A、C选项,故选B.

6.【答案】D

【解析】∵$2\,022^a=2\,023$,$2\,023^b=2\,022$,$c=\ln 2$,

∴$a=\log_{2\,022}2\,023>1$,

$b=\log_{2\,023}2\,022$,$0<b<1$,$0<c<1$;

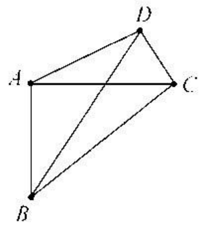
∴$\log_a c<0$,$\log_b c>0$,∴$\log_a c<\log_b c$,故A错误;

∵$0<c<1$,$a>b$,∴$\log_c a<\log_c b$,$a^c>b^c$,$c^a<c^b$,故BC错误,D正确,故选D.

7.【答案】B

【解析】∵抛物线C_1:$y=x^2+2x$和C_2:$y=-x^2+a$分别是$y=x^2$经过平移、对称变换而得到,∴它们是全等的,具有中心对称性,∵l_1和l_2是它们的公切线,l_1和C_1、C_2分别相切于M,N两点,l_2和C_1、C_2分别相切于P,Q两点,∴M,N和P,Q都关于对称中心对称,线段PQ与MN互相平分,故选B.

8.【答案】B



【解析】由题意可知:$AB=AC$,$AD=2\sqrt{2}$,$CD=2$,

设$\angle ADC=\theta$,在$\triangle ADC$中,$\frac{AC}{\sin\theta}=\frac{CD}{\sin\angle DAC}$,

$AC\sin\angle DAC=CD\sin\theta=2\sin\theta$,$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos\theta=12-8\sqrt{2}\cos\theta$.

在$\triangle ADB$中,

$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\angle DAB$

$=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos\left(\frac{\pi}{2}+\angle DAC\right)$

$=12-8\sqrt{2}\cos\theta+8+4\sqrt{2}AC\sin\angle DAC$

$=20-8\sqrt{2}\cos\theta+8\sqrt{2}\sin\theta$

$=20+16\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 36$,

∴BD的最大值为6,故选B.

9.【答案】AD

【解析】由所给频率分布直方图可知,抽取的学生成绩在区间[90,100)内的频率为$0.040\times10=$

0.4，∴成绩在区间[90,100)内的学生有 $0.4\times400=160$ 人，故 A 正确；

由 $(0.005+0.010+0.015+x+0.040)\times10=1$，得 $x=0.030$，故 B 错误；

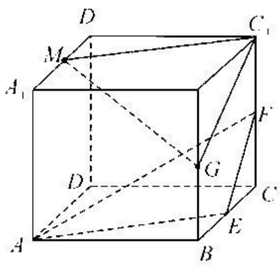
抽取的学生的平均分为 $0.05\times55+0.10\times65+0.15\times75+0.30\times85+0.40\times95=84$，估计全校的平均分为 84，故 C 错误；

设抽取学生成绩 80%分位数为 m，则 $\dfrac{m-90}{100-90}=\dfrac{0.8-0.6}{0.4}$，解得 $m=95$，估计全校学生成绩的 80%分位数为 95，故 D 正确．故选 AD.

10.【答案】ACD

【解析】∵平面 A_1ADD_1 // 平面 B_1BCC_1，$EF\subset$ 平面 B_1BCC_1，∴直线 EF 到平面 A_1ADD_1 的距离为 2，故 A 正确；

如图，取 A_1D_1 的中点 M，连接 MC_1，易证 MC_1 // AE，∴$\angle MC_1G$ 是直线 AE 与直线 C_1G 的夹角，



∵$MC_1=C_1G=\sqrt{5}$，$MG=\sqrt{6}$，

∴$\cos\angle MC_1G=\dfrac{MC_1{}^2+C_1G^2-MG^2}{2MC_1\cdot C_1G}=\dfrac{2}{5}$，

故 B 错误；

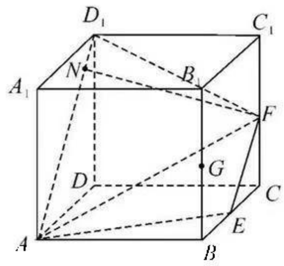
记点 C 与点 G 到平面 AEF 的距离分别为 d_1、d_2，

∵$V_{C\text{-}AEF}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle AEF}\cdot d_1=V_{A\text{-}CEF}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1\times1}{2}\cdot2=\dfrac{1}{3}$，

$V_{G\text{-}AEF}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle AEF}\cdot d_2=V_{A\text{-}GEF}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2\times1}{2}\cdot2=\dfrac{2}{3}$，∴$d_1:d_2=1:2$，即点 C 与点 G 到平面 AEF 的距离之比为 $1:2$，故 C 正确；

连接 FD_1、AD_1，易证 AD_1 // EF，A、D_1、F、E 四点共面，∴平面 AEF 截正方体所得截面为梯形 AD_1FE，如图作 $FN\perp AD_1$，垂足为 N，

∵$FD_1=AE=\sqrt{5}$，$EF=\sqrt{2}$，$AD_1=2\sqrt{2}$，



∴$FN=\sqrt{(\sqrt{5})^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

$S_{\text{梯形}AD_1FE}=\dfrac{1}{2}\cdot(\sqrt{2}+2\sqrt{2})\cdot\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{9}{2}$，

故 D 正确．故选 ACD.

11.【答案】ACD

【解析】对于选项 A，若 $a>b\geqslant0$，则 $a^3|a|=a^4>b^4=b^3|b|$，若 $a\geqslant0>b$，则 $a^3|a|\geqslant0>b^3|b|$，若 $0>a>b$，则 $a^3|a|=-a^4>-b^4=b^3|b|$，∴若 $a>b$，都有 $a^3|a|>b^3|b|$，故 A 正确；

对于选项 B，当 $a=b>0$，$b\ln a=a\ln b$ 显然成立，故 B 错误；

对于选项 C，∵$a+b=2$，$a^2+b^2=4-2ab$，

∴$\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}=\dfrac{4-2(ab-1)}{(ab-1)^2+4}$，

令 $t=ab-1(t\leqslant0)$，则 $\dfrac{4-2(ab-1)}{(ab-1)^2+4}=\dfrac{4-2t}{t^2+4}$，

令 $4-2t=m$，则 $t=\dfrac{4-m}{2}$，$\dfrac{4-2t}{t^2+4}=\dfrac{4m}{m^2-8m+32}=\dfrac{4}{m+\dfrac{32}{m}-8}\leqslant\dfrac{4}{8\sqrt{2}-8}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$，

∴$\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}$ 最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$，故 C 正确；

对于选项 D，∵$a^2+b^2=1$，∴$2|ab|\leqslant1$，$-\dfrac{1}{2}\leqslant ab\leqslant\dfrac{1}{2}$，则 ab 的取值范围为 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$，故 D 正确．故选 ACD.

12.【答案】ABC

【解析】对于选项 A，由题意 $\{a_n\}$ 的前 8 项为 1，2，3，4，5，7，8，9，$S_8=39$，故 A 正确；

对于选项 B，集合 A 为奇数集，集合 B 中的元素都是偶数，按照从小到大排列，若连续的两个数是奇数，则 $a_{n+2}-a_{n+1}=2$，若连续的两个数是一个奇数，一个偶数，则 $a_{n+2}-a_{n+1}=1$，故 B 正确；

对于选项 C，令 $k=2^{n-1}+n$，∵$2\times2^{n-1}-1$ 比 2^n

小 1，∴$\{a_n\}$的前 k 项中，来自集合 A 的有 2^{n-1} 个，来自集合 B 的有 n 个，∴$S_k=1+3+\cdots+(2\times2^{n-1}-1)+2+2^2+2^3+\cdots+2^n=\dfrac{2^{n-1}(1+2\times2^{n-1}-1)}{2}+\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{2n-2}+2^{n+1}-2$，即 $S_{2^{n-1}+n}=2^{2n-2}+2^{n+1}-2$，故 C 正确；

对于选项 D，$\{a_n\}$的前 26 项包括 A 集合的 1，3，5，…，41 共 21 个，B 集合的 2，4，8，16，32 共 5 个，∴$S_{26}=1+3+\cdots+41+2+4+\cdots+32=\dfrac{21\times(1+41)}{2}+\dfrac{2(1-2^5)}{1-2}=503$，

∵$a_{27}=43$，$12a_{27}=516$，$S_{26}<12a_{27}$，不符合条件，故 D 错误. 故选 ABC.

13.【答案】28

【解析】$\left(x-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 的通项公式为

$T_{r+1}=C_8^r x^{8-r}\left(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^r=(-1)^r C_8^r x^{8-\frac{4r}{3}}$，

当 $8-\dfrac{4r}{3}=0$ 时，解得 $r=6$，

∴展开式中的常数项为 $(-1)^6C_8^6=28$.

14.【答案】①③④

【解析】记 $g(x)=f'(x)$，$k_1=g(x_1)<0$，$k_2=g(x_2)>0$.

①$y=\dfrac{\ln x}{x}$，$g(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，$g'(x)=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$，

当 $x\in\left(0,e^{\frac{3}{2}}\right)$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in\left(e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$ 时，$g'(x)>0$，∴$x=e^{\frac{3}{2}}$，$g(x)$ 有最小值 $-\dfrac{1}{2e^3}$，

$g(x)$ 值域为 $\left(-\dfrac{1}{2e^3},+\infty\right)$，

∴存在 x_1、x_2 使 $k_1+k_2=g(x_1)+g(x_2)=e$，

故 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 是 e 函数；

②$y=\begin{cases}-x, x\leqslant0,\\(e+1+x)x, x>0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}-1, x\leqslant0,\\e+1+2x, x>0,\end{cases}$

∵$k_1=g(x_1)<0$，$k_2=g(x_2)>0$，

∴$k_1=-1$，$k_2=e+1+2x_2(x_2>0)$，

∴$k_1+k_2=e+2x_2>e$，不存在 x_1、x_2 使 $k_1+k_2=g(x_1)+g(x_2)=e$，

故 $y=\begin{cases}-x, x\leqslant0,\\(e+1+x)x, x>0\end{cases}$ 不是 e 函数；

③$y=x^2+2x$，$g(x)=2x+2$，$g(x)$ 值域为 $\mathbf{R}$，

∴存在 x_1、x_2 使 $k_1+k_2=g(x_1)+g(x_2)=e$，故 $y=x^2+2x$ 是 e 函数；

④$y=\left|\dfrac{1}{x}\right|$，$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, x<0,\\-\dfrac{1}{x^2}, x>0,\end{cases}$

$g(x)$ 值域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

∴存在 x_1、x_2 使 $k_1+k_2=g(x_1)+g(x_2)=e$，故 $y=\left|\dfrac{1}{x}\right|$ 是 e 函数.

15.【答案】56

【解析】当 L 盒放置 10 支样品，且 M 盒放置 8 支样品时，S 盒可放置 6、5、4、3、2、1 支样品，共 6 种不同的放置方法；当 L 盒放置 10 支样品，且 M 盒放置 7 支样品时，S 盒可放置 5、4、3、2、1 支样品，共 5 种不同的放置方法；……当 L 盒放置 10 支样品，且 M 盒放置 3 支样品时，S 盒可放置 1 支样品，只 1 种放置方法.

∴L 盒放置 10 支样品，共有放置方法：$6+5+4+3+2+1=21$ 种，

同理 L 盒放置 9 支样品，共有放置方法：$5+4+3+2+1=15$ 种，

L 盒放置 8 支样品，共有放置方法：$4+3+2+1=10$ 种，

L 盒放置 7 支样品，共有放置方法：$3+2+1=6$ 种，

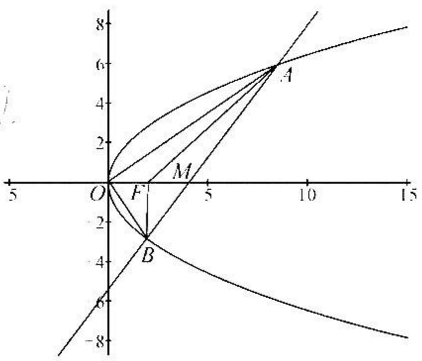
L 盒放置 6 支样品，共有放置方法：$2+1=3$ 种，

L 盒放置 5 支样品，共有放置方法：1 种，

∴不同的放置方法总数为 $21+15+10+6+3+1=56$ 种.

16.【答案】$\sqrt{2}x+y-4\sqrt{2}=0$ 或 $\sqrt{2}x-y-4\sqrt{2}=0$

【解析】由已知可设直线 OA 方程为 $y=kx$，又 $OA\perp OB$，OB 方程为 $y=-\dfrac{1}{k}x$，



由$\begin{cases} y^2=4x, \\ y=kx \end{cases}$解得 $A\left(\frac{4}{k^2},\frac{4}{k}\right)$,

由$\begin{cases} y^2=4x, \\ y=-\frac{1}{k}x \end{cases}$解得 $B(4k^2,-4k)$,

$k_{AB}=\dfrac{-4k-\frac{4}{k}}{4k^2-\frac{4}{k^2}}=\dfrac{k}{1-k^2}$,

$AB: y+4k=\frac{k}{1-k^2}(x-4k^2)$,

令 $y=0$,得 $x=4$,∴直线 l 与 x 轴交点 $M(4,0)$,

$S_1=S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOM}+S_{\triangle MOB}$

$=\frac{1}{2}\times4\times\left|\frac{4}{k}+4k\right|=\frac{8(k^2+1)}{|k|}$

$S_2=S_{\triangle AOF}=\frac{1}{2}\times1\times\left|\frac{4}{k}\right|=\frac{2}{|k|}$,

$S_3=S_{\triangle BOF}=\frac{1}{2}\times1\times|-4k|=2|k|$.

∵$S_1=6S_2+3S_3$,

∴$\frac{8(k^2+1)}{|k|}=\frac{12}{|k|}+6|k|$,解得 $k=\pm\sqrt{2}$,

∴直线 l 的方程 $y=\pm\sqrt{2}(x-4)$,

即$\sqrt{2}x\pm y-4\sqrt{2}=0$.

17. 解:(1)由正弦定理知,$\sin A(\sin 2A-\cos B\cos C)+\sin B\sin A\sin C=0$,显然 $\sin A\neq0$,

故 $\sin 2A-\cos B\cos C+\sin B\sin C=0$,

化简得 $\sin 2A=\cos B\cos C-\sin B\sin C=\cos(B+C)=\cos(\pi-A)=\sin\left(A-\frac{\pi}{2}\right)$,

∵$A\in(0,\pi)$,∴$2A+A-\frac{\pi}{2}=\pi$(其中 $2A=A-\frac{\pi}{2}$舍去),即 $A=\frac{\pi}{2}$. …………………… 5分

(2)由(1)知 $A=\frac{\pi}{2}$,则 $b^2+c^2=a^2=4$,

那么$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\leqslant\frac{b^2+c^2}{4}=1$(当且仅当 $b=c=\sqrt{2}$时等号成立),

则$\triangle ABC$ 面积的取值范围为$(0,1]$. …… 10分

18. 解:(1)当 $n=1$ 时,$2a_1=1+a_1-1$,故 $a_1=0$,

当 $n\geqslant2$ 时,$2S_{n-1}=(n-1)(n-1+a_1-1)$,作差得,$2a_n=n(n-1)-(n-1)(n-2)$,即 $a_n=n-1$,此式对 $n=1$ 也成立,故数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n-1,n\in\mathbf{N}^*$. …………………… 5分

(2)由(1)知,$b_n=(n-1)\cdot2^{n-1}+\frac{1}{n(n+1)}$,不妨令 $c_n=(n-1)\cdot2^{n-1}$,且数列$\{c_n\}$的前 n 项和 W_n,

则 $W_n=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+(n-1)\cdot2^{n-1}$,

$2W_n=1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+(n-1)\cdot2^n$,

作差,得$-W_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}-(n-1)\cdot2^n$,

即 $W_n=(n-2)\cdot2^n+2$. …………………… 9分

则 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=W_n+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=W_n+1-\frac{1}{n+1}$

$=(n-2)\cdot2^n+3-\frac{1}{n+1}$,

即数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n 为$(n-2)\cdot2^n+3-\frac{1}{n+1}$. …………………………………… 12分

19. 解:(1)证明:∵面 $ADE\perp$面 $BCDE$,面 $ADE\cap$面 $BCDE=DE$,且 $AE\perp DE$,

∴$AE\perp$面 $BCDE$,又 $BF\subset$面 $BCDE$,∴$AE\perp BF$,

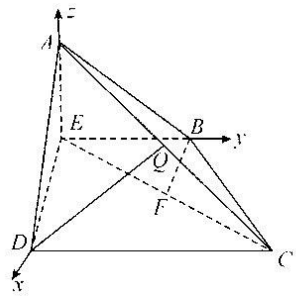
又在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中,$AE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC=\sqrt{2}$,

则 $BE=2\sqrt{2}=BC$,又 F 为 CE 中点,

故 $BF\perp EC$,且 $AE\cap EC=E$,则 $BF\perp$面 AEC,

又 $AC\subset$面 AEC,所以 $BF\perp AC$. ………… 6分

(2)由(1)知,ED,EB,EA 互相垂直,分别以 ED,EB,EA 为 x,y,z 轴非负半轴建立如图所示的空间直角坐标系,



其中 $E(0,0,0)$,$A(0,0,\sqrt{2})$,$D(\sqrt{6},0,0)$,$C(\sqrt{6},3\sqrt{2},0)$,则$\overrightarrow{ED}=(\sqrt{6},0,0)$,$\overrightarrow{DC}=(0,3\sqrt{2},0)$,$\overrightarrow{DA}=(-\sqrt{6},0,\sqrt{2})$,

不妨设$\overrightarrow{CQ}=\lambda\overrightarrow{CA}$,则$\overrightarrow{DQ}=(1-\lambda)\overrightarrow{DC}+\lambda\overrightarrow{DA}=(-\sqrt{6}\lambda,3\sqrt{2}(1-\lambda),\sqrt{2}\lambda)$,

再设 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$分别是面 ADQ,面 EDQ 的法向量,

则分别满足$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DA}=0, \\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}$与$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ED}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DQ}=0,\end{cases}$

令 $x_1=1$,$y_2=\lambda$,得到 $\boldsymbol{m}=(1,0,\sqrt{3})$,$\boldsymbol{n}=(0,\lambda,3(\lambda-1))$.

由题意知,$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{3\sqrt{3}(1-\lambda)}{2\sqrt{\lambda^2+9(\lambda-1)^2}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{37}}$,解得 $\lambda=\frac{1}{3}$,即$\frac{CQ}{CA}=\frac{1}{3}$. ………… 12分

20. 解：(1)由题意知，$P_{i+1}=(1-40\%)P_i+40\%(1-P_i)=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}P_i$，

整理得，$P_{i+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{5}\left(P_i-\frac{1}{2}\right)$，其中 $P_1=1$，

故数列$\left\{P_n-\frac{1}{2}\right\}$是以 $P_1-\frac{1}{2}$为首项，$\frac{1}{5}$为公比的等比数列，则 $P_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$，

即 $P_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$，

那么 $P_4=\frac{63}{125}$. ………………………… 6 分

(2)当某期选择方案一时，获利期望值为 $W_1=(1-10\%)\times2.4\%\times\frac{2}{12}\times100\ 000=360$ 元；

当某期选择方案二时，获利期望值为 $W_2=(1-20\%)\times3.0\%\times\frac{2}{12}\times100\ 000=400$ 元；

那么，在一年间，老张共投资了 6 次，获得的总利润的期望为 $W=[P_1W_1+(1-P_1)W_2]+[P_2W_1+(1-P_2)W_2]+\cdots+[P_6W_1+(1-P_6)W_2]$

$=(P_1+P_2+\cdots+P_6)W_1+[(1-P_1)+(1-P_2)+\cdots+(1-P_6)]W_2$

$\approx2\ 400-40\times\left(3+\frac{5}{8}\right)=2\ 255$ 元，

即一年后老张可获得的利润的期望约为 2 255 元.
………………………………………… 12 分

21. 解：(1)由椭圆的对称性知，$P_1(-2,1)$，$P_2(0,\sqrt{2})$，$P_3(2,1)$三点在椭圆 C 上，故 $b^2=2$，$a^2=8$，

从而椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. ……… 4 分

(2)直线 MN 过定点$(0,-2\sqrt{2})$，证明如下：

假设存在，不妨设直线 P_2M、P_2N、MN 的斜率分别为 k_1，k_2，k，满足 $k_1+k_2+2k=0$，

设直线 MN 的方程为 $y=kx+m\ (k\neq0)$，

且 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

与椭圆 C 的方程联立，得$(1+4k^2)x^2+8kmx+4(m^2-2)=0$，

则 $\Delta=64k^2m^2-16(1+4k^2)(m^2-2)>0$，

即 $m^2<8k^2+2$ (*)，

且$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-8km}{1+4k^2},\\x_1x_2=\frac{4(m^2-2)}{1+4k^2},\end{cases}$

那么 $k_1+k_2+2k=\frac{y_1-\sqrt{2}}{x_1}+\frac{y_2-\sqrt{2}}{x_2}+2k=0$，

化简得，$4kx_1x_2+(m-\sqrt{2})(x_1+x_2)=0$，

整理得，$m^2+\sqrt{2}m-4=0$，

即 $m=-2\sqrt{2}$或 $m=\sqrt{2}$(舍去)，

故直线 MN 过定点$(0,-2\sqrt{2})$. ………… 12 分

22. 解：(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=2x-\sin x-\ln x$，

则 $f'(x)=2-\cos x-\frac{1}{x}$，

当 $x\geqslant1$ 时，$f'(x)\geqslant1-\cos x\geqslant0$，

故 $f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，不存在极值点；

当 $0<x<1$ 时，$f''(x)=\sin x+\frac{1}{x^2}>0$ 总成立，

故函数 $f'(x)$在$(0,1)$上单调递增，

且 $f'(1)=1-\cos1>0$，$f'\left(\frac{1}{4}\right)=-\cos\frac{1}{4}-2<0$，故在$\left(\frac{1}{4},1\right)$上存在唯一极值点，

综上，当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$的极值点有且仅有一个. ………………………………………… 5 分

(2)由 $f(x_1)=f(x_2)$知 $2x_1-\sin x_1-\sqrt{a}\ln x_1=2x_2-\sin x_2-\sqrt{a}\ln x_2$，

整理得，$2(x_1-x_2)-(\sin x_1-\sin x_2)=\sqrt{a}(\ln x_1-\ln x_2)$(*)，

不妨令 $g(x)=x-\sin x(x>0)$，

则 $g'(x)=1-\cos x\geqslant0$，

故 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

当 $0<x_1<x_2$ 时，有 $g(x_1)<g(x_2)$，

即 $x_1-\sin x_1<x_2-\sin x_2$，

那么 $\sin x_1-\sin x_2>x_1-x_2$，…………… 8 分

因此，(*)即转化为$\sqrt{a}>\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}$，

接下来证明$\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}>\sqrt{x_1x_2}\ (0<x_1<x_2)$，

等价于证明 $\ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}-\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}$，

不妨令$\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}=t\ (0<t<1)$，

建构新函数 $\varphi(t)=2\ln t-t+\frac{1}{t}$，

$\varphi'(t)=\frac{2}{t}-1-\frac{1}{t^2}=\frac{-(t-1)^2}{t^2}<0$，

则 $\varphi(t)$在$(0,1)$上单调递减，

$\varphi(t)>\varphi(1)=0$，故 $\ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}-\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}$得证.

由不等式的传递性知 $\sqrt{x_1x_2}<\sqrt{a}$，即 $x_1x_2<a$.
………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。