2022—2023学年(下)高一年级阶段性测试(开学考)

数 学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $A=\{x|(x-1)(x+2)<0\}$,$B=\{x|\log_2 x<1\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{x|-1<x<1\}$　　B. $\{x|0<x<1\}$

C. $\{x|-2<x<1\}$　　D. $\{x|0<x<2\}$

2. 设 $a,b\in\mathbf{R}$,则"$a^3>b^3$"是"$a^2>b^2$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 已知 α 是第二象限角,若 $\sin\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{4}{5}$,则 $\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=$

A. $-\frac{3}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $-\frac{4}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

4. 若 $x\in[1,3)$,则 $\frac{4}{x}+\frac{1}{3-x}$ 的最小值为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 方程 $\ln x=4-2^x$ 的解所在的区间为

A. $(0,1)$　　B. $(1,2)$　　C. $(2,3)$　　D. $(3,4)$

6. 著名画家达·芬奇画完他的《抱银貂的女子》后,看着画中女人脖子上悬挂的黑色珍珠项链,开始思考这样一个问题:固定项链的两端,使其在重力的作用下自然下垂,那么项链所形成的曲线是什么?这就是著名的悬链线问题,最终的答案是这条曲线的方程是双曲余弦函数,其函数表达式为 $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$,相应的双曲正弦函数表达式为 $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.设函数

$f(x)=\sinh x\cdot\cosh x$，若实数 m 满足不等式 $f(m-6)+f(m^2)<0$，则 m 的取值范围为

A. $(-3,2)$　　B. $(-2,3)$

C. $(-2,2)$　　D. $(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$

7. 已知 $a=0.4^2$，$b=2^{0.4}$，$c=\ln 6$，则

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $b<a<c$　　D. $c<a<b$

8. 已知函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 为奇函数，且在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上单调递减，则 ω 的取值范围是

A. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　B. $\left[\frac{1}{2},1\right)$　　C. $\left(0,\frac{2}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{2}{3},1\right)$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x-2$，则

A. $f(x)$ 的最小正周期为 6π

B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{9}$ 对称

C. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{5\pi}{18},-2\right)$ 对称

D. $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增

10. 已知函数 $f(x)=\ln\frac{2+x}{2-x}$，则

A. $f(x)$ 的定义域为 $(-2,2)$

B. $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称

C. $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$

D. $f(x)$ 是减函数

11. 下列计算结果正确的是

A. $\cos^4\frac{\pi}{8}-\sin^4\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}=\sqrt{3}$

C. $2\sin 15^\circ\cdot\sin 75^\circ=1$

D. $\sin 140^\circ(\sqrt{3}-\tan 190^\circ)=1$

12. 已知函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-|\log_2(x-3)|$ 有两个零点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，则

A. $\frac{1}{x_1}<\frac{1}{4}$

B. $(x_1-4)(x_2-3)<0$

C. $|\log_2(x_1-3)|=\log_2\frac{1}{x_1-3}$

D. $(x_1-3)(x_2-3)>1$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 命题："$\forall x>0,\ln(x+1)>0$"的否定为________.

14. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=4^x+3x+b$（b 为常数），则 $f(x)$ 在 $[-3,-1]$ 上的最大值为________.

15. 已知 α,β 均为锐角，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{5}{13}$，则 $\cos\beta=$______.

16. 已知函数 $f(x)=-x^2+2x+a(a>0)$，若 $f(f(x))$ 有三个零点，则 $a=$______.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R})$ 的最小值为 -9，方程 $f(x)=7$ 有两个实根 -2 和 6.

(Ⅰ)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(Ⅱ)求关于 x 的不等式 $f(x)\leqslant mx-4m-5(m\in\mathbf{R})$ 的解集.

18. (12 分)

已知函数 $f(x)=\lg(-x^2+4x+5)$ 的定义域为 M，关于 x 的不等式 $|x-a|\leqslant7$ 的解集为 N.

(Ⅰ)当 $a=8$ 时，求 $(\complement_{\mathbf{R}}M)\cup N$；

(Ⅱ)若 $x\in M$ 是 $x\in N$ 的充分不必要条件，求实数 a 的取值范围.

19. (12 分)

已知函数 $f(x)=\log_a(4-ax)$.

(Ⅰ)若当 $x\in\left[\frac{1}{2},3\right)$ 时，函数 $f(x)$ 有意义，求实数 a 的取值范围.

(Ⅱ)是否存在实数 a，使得函数 $f(x)$ 在 $[-5,21]$ 上为增函数，并且在此区间的最小值为 -1？若存在，试求出 a 的值；若不存在，请说明理由.

20.（12 分）

已知函数 $f(x)=(2\cos^2x-1)\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 4x$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调递减区间；

（Ⅱ）若当 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant m$ 有解，求实数 m 的取值范围.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=-\sin^2x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的值域.

（Ⅱ）求不等式 $f(x)\leqslant 0$ 的解集.

（Ⅲ）当 m 为何值时，关于 x 的方程 $f(x)=m$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 内的实根最多？最多有几个？

（直接给出答案即可，无需说明理由）

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=\left|\frac{2^x-1}{2^x+1}\right|$.

（Ⅰ）判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并说明理由；

（Ⅱ）若存在正实数 x_1,x_2，且 $x_2>x_1$，使得 $f(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上的值域为 $\left[\frac{a}{2^{x_1+1}-3},\frac{a}{2^{x_2+1}-3}\right]$，求实数 a 的取值范围.

2022—2023学年(下)高一年级阶段性测试(开学考)

数学·答案

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.

1. **答案** B

命题意图 本题考查交集的概念与运算,一元二次不等式、对数不等式的解法.

解析 由 $A=\{x\mid -2<x<1\}$, $B=\{x\mid 0<x<2\}$,得 $A\cap B=\{x\mid 0<x<1\}$.

2. **答案** D

命题意图 本题考查充分条件与必要条件的判断.

解析 当 $a=0,b=-1$ 时,$a^3>b^3$,而 $a^2=0<b^2=1$,所以当 $a^3>b^3$ 时,$a^2>b^2$ 不一定成立;同理,当 $a=-1,b=0$ 时,满足 $a^2>b^2$,而 $a^3=-1<b^3=0$,所以当 $a^2>b^2$ 时,$a^3>b^3$ 不一定成立.

3. **答案** B

命题意图 本题考查利用诱导公式和同角三角函数的基本关系化简求值.

解析 $\because \sin\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos\alpha=\frac{4}{5}$,$\therefore \cos\alpha=-\frac{4}{5}$,又 α 是第二象限角,$\therefore \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{3}{5}$,$\therefore \cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

4. **答案** C

命题意图 本题考查利用基本不等式求最值.

解析 $\because x\in[1,3)$,$\therefore 3-x>0$,$\therefore \frac{4}{x}+\frac{1}{3-x}=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{3-x}\right)[x+(3-x)]=\frac{1}{3}\left[5+\frac{4(3-x)}{x}+\frac{x}{3-x}\right]\geqslant \frac{1}{3}\left[5+2\sqrt{\frac{4(3-x)}{x}\cdot\frac{x}{3-x}}\right]=3$,当且仅当 $\frac{4(3-x)}{x}=\frac{x}{3-x}$,即 $x=2$ 时,取等号.

5. **答案** B

命题意图 本题考查函数的零点与方程的解的转化问题.

解析 由 $\ln x=4-2^x$,得 $\ln x+2^x-4=0$. 设函数 $f(x)=\ln x+2^x-4$,则方程 $\ln x=4-2^x$ 的解等价于函数 $f(x)$ 的零点,易知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,又 $\because f(1)=-2<0$, $f(2)=\ln 2>0$,$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的零点在区间 $(1,2)$ 内,即原方程的解在区间 $(1,2)$ 内.

6. **答案** A

命题意图 本题考查数学文化,利用函数的奇偶性、单调性解不等式.

解析 由题意,$f(x)=\sinh x\cdot\cosh x=\frac{1}{4}(e^{2x}-e^{-2x})$,易知 $f(x)$ 为单调递增的奇函数. $f(m-6)+f(m^2)<0$ 可转化为 $f(m-6)<-f(m^2)=f(-m^2)$,$\therefore m-6<-m^2$,解得 $-3<m<2$.

7. **答案** A

命题意图 本题考查指数幂、对数式的大小比较,指数及对数函数的单调性.

解析 易知 $0<a<1$, $1<b<2^{0.5}=\sqrt{2}<1.5$,又 $\because 1.5=\ln e^{1.5}=\ln\sqrt{e^3}<\ln\sqrt{27}<\ln\sqrt{36}=\ln 6=c$,$\therefore a<b<c$.

8. 答案　C

命题意图　本题考查三角函数的图象与性质.

解析　因为 $f(x)$ 为奇函数,所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$,所以 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\omega x$. 令 $t=\omega x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{4}\right]$,则 $t\in\left[-\frac{\omega\pi}{6},\frac{3\omega\pi}{4}\right]$,因为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上单调递减,$\omega>0$,所以 $\begin{cases}-\frac{\omega\pi}{6}\geqslant-\frac{\pi}{2},\\ \frac{3\omega\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $0<\omega\leqslant\frac{2}{3}$.

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 答案　BC

命题意图　本题考查利用辅助角公式化简,及正弦型函数的最小正周期、单调性、对称性.

解析　函数 $f(x)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x+\frac{1}{2}\cos 3x\right)-2=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)-2$,∴ 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$,故 A 错误;

将 $x=\frac{\pi}{9}$ 代入 $f(x)$ 的解析式得 $f\left(\frac{\pi}{9}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}-2=0$,则 $x=\frac{\pi}{9}$ 为 $f(x)$ 图象的一条对称轴方程,故 B 正确;

将 $x=\frac{5\pi}{18}$ 代入 $f(x)$ 的解析式得 $f\left(\frac{5\pi}{18}\right)=2\sin\pi-2=-2$,则点 $\left(\frac{5\pi}{18},-2\right)$ 为 $f(x)$ 图象的一个对称中心,故 C 正确;

因为区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 包含了 $f(x)$ 的一个最大值点 $\frac{\pi}{9}$,故 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上不可能单调递增,故 D 错误.

10. 答案　AC

命题意图　本题考查对数函数的定义域、奇偶性、单调性、对称性.

解析　令 $\frac{2+x}{2-x}>0$,得 $-2<x<2$,故 A 正确;

$f(-x)=\ln\frac{2-x}{2+x}=\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{-1}=-\ln\frac{2+x}{2-x}=-f(x)$,∴ $f(x)$ 为奇函数,图象关于原点对称,故 B 错误;

当 $-2<x<2$ 时,$m=\frac{2+x}{2-x}=-1+\frac{4}{2-x}\in(0,+\infty)$,所以 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$,故 C 正确;

因为当 $-2<x<2$ 时,m 关于 x 单调递增,又 $y=\ln m$ 为增函数,所以 $f(x)$ 是增函数,故 D 错误.

11. 答案　ABD

命题意图　本题考查三角恒等变换.

解析　$\cos^4\frac{\pi}{8}-\sin^4\frac{\pi}{8}=\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故 A 正确;

$\frac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}=\frac{\tan 45^\circ+\tan 15^\circ}{1-\tan 45^\circ\cdot\tan 15^\circ}=\tan(45^\circ+15^\circ)=\sqrt{3}$,故 B 正确;

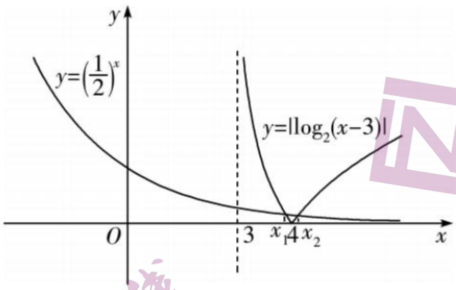
$2\sin 15^\circ\cdot\sin 75^\circ=2\sin 15^\circ\sin(90^\circ-15^\circ)=2\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\neq 1$,故 C 错误;

$\sin 140^\circ(\sqrt{3}-\tan 190^\circ)=\sin 140^\circ\left(\sqrt{3}-\frac{\sin 190^\circ}{\cos 190^\circ}\right)=\sin 140^\circ\cdot\frac{\sqrt{3}\cos 190^\circ-\sin 190^\circ}{\cos 190^\circ}=\sin 140^\circ\cdot\frac{2\cos(30^\circ+190^\circ)}{\cos 190^\circ}=\sin 140^\circ\cdot\frac{2\cos(360^\circ-140^\circ)}{\cos 190^\circ}=\frac{2\sin 140^\circ\cos 140^\circ}{\cos 190^\circ}=\frac{\sin 280^\circ}{\cos 190^\circ}=\frac{\sin(190^\circ+90^\circ)}{\cos 190^\circ}=\frac{\cos 190^\circ}{\cos 190^\circ}=1$,故 D 正确.

12. **答案** BC

命题意图 本题考查函数的应用、指对函数的性质、对数的运算法则.

解析 令 $f(x)=0$,则 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=|\log_2(x-3)|$,即 x_1,x_2 对应函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 $y=|\log_2(x-3)|$ 的图象的交点的横坐标,如图,作出这两个函数的大致图象:



由图可知 $3<x_1<4<x_2$,$\therefore \frac{1}{4}<\frac{1}{x_1}<\frac{1}{3}$,故 A 错误,B 正确;

$\because \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}=|\log_2(x_1-3)|=-\log_2(x_1-3)=\log_2\frac{1}{x_1-3}$,故 C 正确;

同理,$\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}=|\log_2(x_2-3)|=\log_2(x_2-3)$,且 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$,$\therefore \log_2(x_1-3)(x_2-3)=\log_2(x_1-3)+\log_2(x_2-3)=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}<0$,$\therefore 0<(x_1-3)(x_2-3)<1$,故 D 错误.

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. **答案** $\exists x>0,\ln(x+1)\leqslant 0$

命题意图 本题考查全称量词命题的否定.

解析 将全称量词改写为存在量词,并将结论进行否定.

14. **答案** -6

命题意图 本题考查由函数的奇偶性求参数,及其与单调性、最值的综合应用.

解析 $\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为奇函数,当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=4^x+3x+b$,$\therefore f(0)=1+b=0$,得 $b=-1$,则当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=4^x+3x-1$,此时 $f(x)$ 单调递增,由奇函数的性质知,$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,$\therefore$ 当 $x\in[-3,-1]$ 时,$f(x)_{\max}=f(-1)=-f(1)=-(4+3-1)=-6$.

15. **答案** $\frac{16}{65}$

命题意图 本题考查已知正(余)弦求余弦值,即给值求值型三角函数问题.

解析 $\because \alpha,\beta$ 均为锐角,$\therefore \alpha+\beta\in(0,\pi)$.又$\because \sin\alpha=\frac{3}{5}$,$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{5}{13}$,$\therefore \cos\alpha=\frac{4}{5}$,$\sin(\alpha+\beta)=\frac{12}{13}$,

$\therefore \cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=\left(-\frac{5}{13}\right)\times\frac{4}{5}+\frac{12}{13}\times\frac{3}{5}=\frac{16}{65}$.

16. **答案** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

命题意图 本题考查由零点个数求参数.

解析 令 $t=-x^2+2x+a(a>0)$,由 $f(t)=0$,得 $t=1\pm\sqrt{1+a}$,又$\because y=f(f(x))$ 有三个零点,$\therefore 1\pm\sqrt{1+a}=$

$f(x)$有三个不同的解. $\because a>0,\therefore 1+\sqrt{1+a}>1-\sqrt{1+a}$. 结合图形可知,$1-\sqrt{1+a}=f(x)$有两解,$1+\sqrt{1+a}=f(x)$仅有一解,则令$1+\sqrt{1+a}=f(x)_{\max}=a+1$,$\therefore a^2-a-1=0$,$\therefore a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$(舍去)或$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

四、解答题:共70分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查由二次函数的性质求其解析式,解含有参数的一元二次不等式.

解析 (Ⅰ)由题意知$a>0$, ……(1分)

$f(x)-7=a(x+2)(x-6)$,$\therefore f(x)=a(x+2)(x-6)+7$. ……(3分)

$\because -2$和6关于直线$x=2$对称,$\therefore f(x)_{\min}=f(2)=-16a+7=-9$,得$a=1$, ……(4分)

$\therefore f(x)=(x+2)(x-6)+7=x^2-4x-5$. ……(5分)

(Ⅱ)$\because f(x)\leqslant mx-4m-5$,$\therefore x^2-4x-5\leqslant mx-4m-5$,

$\therefore (x-4)(x-m)\leqslant 0$. ……(7分)

当$m<4$时,得$m\leqslant x\leqslant 4$,即不等式的解集为$[m,4]$; ……(8分)

当$m=4$时,得$x=4$,即不等式的解集为$\{4\}$; ……(9分)

当$m>4$时,得$4\leqslant x\leqslant m$,即不等式的解集为$[4,m]$. ……(10分)

18. **命题意图** 本题考查函数与不等式的性质,集合的表示与应用.

解析 (Ⅰ)由题意知$-x^2+4x+5>0$,得$-1<x<5$,

所以$f(x)$的定义域$M=(-1,5)$,

则$\complement_{\mathbf{R}}M=(-\infty,-1]\cup[5,+\infty)$. ……(2分)

当$a=8$时,由$|x-8|\leqslant 7$,得$-7\leqslant x-8\leqslant 7$,即$1\leqslant x\leqslant 15$,

所以$N=[1,15]$. ……(4分)

所以$(\complement_{\mathbf{R}}M)\cup N=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. ……(6分)

(Ⅱ)由$|x-a|\leqslant 7$,得$-7\leqslant x-a\leqslant 7$,即$a-7\leqslant x\leqslant a+7$,

若$x\in M$是$x\in N$的充分不必要条件,则$M\subsetneqq N$, ……(8分)

即$\begin{cases}a+7\geqslant 5,\\ a-7\leqslant -1,\end{cases}$得$-2\leqslant a\leqslant 6$, ……(10分)

所以a的取值范围是$[-2,6]$. ……(12分)

19. **命题意图** 本题考查对数函数的性质及应用、存在性问题.

解析 (Ⅰ)由题意,可知$4-ax>0$对$x\in\left[\frac{1}{2},3\right)$恒成立,

同时$a>0$且$a\neq 1$. ……(2分)

设$g(x)=4-ax$,显然$g(x)$在$\left[\frac{1}{2},3\right)$上为减函数, ……(3分)

由$g(x)>g(3)=4-3a\geqslant 0$,得$a\leqslant\frac{4}{3}$. ……(5分)

$\therefore$ 实数a的取值范围为$(0,1)\cup\left(1,\frac{4}{3}\right]$. ……(6分)

(Ⅱ)假设存在这样的实数a,则$f(x)_{\min}=f(-5)=-1$, ……(7分)

$\therefore \log_a(4+5a)=-1$,即$4+5a=\frac{1}{a}$,

$\therefore a_1=-1$(舍去),$a_2=\frac{1}{5}$. ……………………………………………………………… (9 分)

于是$f(x)=\log_{\frac{1}{5}}\left(4-\frac{x}{5}\right)$,定义域为$(-\infty,20)$, …………………………………… (10 分)

又$[-5,21]\not\subseteq(-\infty,20)$,

故不存在实数 a 满足题意. …………………………………………………………………… (12 分)

20. **命题意图** 本题考查三角恒等变换,及正弦型函数性质的运用、有解问题.

解析 (Ⅰ)$\because f(x)=(2\cos^2x-1)\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 4x$

$=\cos 2x\cdot\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 4x$

$=\frac{1}{2}(\sin 4x+\cos 4x)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)$. …………………………………………………… (3 分)

令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 4x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得$\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{16}\leqslant x\leqslant\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{16},k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore$ 函数$f(x)$的单调递减区间为$\left[\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{16},\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{16}\right](k\in\mathbf{Z})$. ……………………………… (6 分)

(Ⅱ)由题意知,不等式$f(x)\geqslant m$有解等价于$m\leqslant f(x)_{\max}$. ……………………………………… (7 分)

设$t=4x+\frac{\pi}{4}$,$\because x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$,$\therefore t\in\left[\frac{11\pi}{12},\frac{9\pi}{4}\right]$. ……………………………………………… (8 分)

函数$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t$在$\left[\frac{11\pi}{12},\frac{3\pi}{2}\right]$上单调递减,在$\left[\frac{3\pi}{2},\frac{9\pi}{4}\right]$上单调递增,

又$\because\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{11\pi}{12}<\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{9\pi}{4}=\frac{1}{2}$, ……………………………………… (10 分)

$\therefore$ 当$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$时,$f(x)_{\max}=\frac{1}{2}$, …………………………………………………… (11 分)

$\therefore m\leqslant\frac{1}{2}$,即 m 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$. ………………………………………………… (12 分)

21. **命题意图** 本题考查正弦函数及二次函数的图象与性质.

解析 (Ⅰ)$f(x)=-(1-\cos^2x)+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}=\cos^2x+\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}$. ……………………… (1 分)

设$t=\cos x(-1\leqslant t\leqslant 1)$,函数$g(t)=t^2+\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$,

根据二次函数的性质,$g(t)_{\min}=g\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{9}{16}$,$g(t)_{\max}=g(1)=1$,

所以函数$f(x)$的值域为$\left[-\frac{9}{16},1\right]$. …………………………………………………………… (4 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知$g(t)=(t+1)\left(t-\frac{1}{2}\right)$,

由$g(t)\leqslant 0$得$-1\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$,

所以由 $f(x)\leqslant 0$ 可得 $-1\leqslant \cos x\leqslant \frac{1}{2}$，…………（6分）

由余弦函数的图象可知 $f(x)\leqslant 0$ 的解集为 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{5\pi}{3}\right](k\in \mathbf{Z})$. …………（9分）

（Ⅲ）$m=-\frac{1}{2}$ 时，方程在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 内的实根最多，最多有5个. …………（12分）

22. **命题意图** 本题考查函数的奇偶性，以及函数的值域、零点与方程的根的综合问题.

解析 （Ⅰ）由题可知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称，

因为 $f(-x)=\left|\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}\right|=\left|\frac{(2^{-x}-1)\cdot 2^x}{(2^{-x}+1)\cdot 2^x}\right|=\left|\frac{1-2^x}{1+2^x}\right|=\left|\frac{2^x-1}{2^x+1}\right|=f(x)$，

所以函数 $f(x)$ 为偶函数. …………（4分）

（Ⅱ）当 $x>0$ 时，$2^x-1>0$，所以 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1}$，

由此可知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，所以 $f(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上单调递增. …………（6分）

所以 $f(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上的值域为 $[f(x_1),f(x_2)]=\left[\frac{2^{x_1}-1}{2^{x_1}+1},\frac{2^{x_2}-1}{2^{x_2}+1}\right]$，

所以 $\begin{cases}\frac{a}{2^{x_1+1}-3}=\frac{2^{x_1}-1}{2^{x_1}+1},\\ \frac{a}{2^{x_2+1}-3}=\frac{2^{x_2}-1}{2^{x_2}+1},\end{cases}$ …………（7分）

所以 $\frac{a}{2^{x+1}-3}=\frac{2^x-1}{2^x+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不等的实根，所以 $(2\cdot 2^x-3)(2^x-1)-a(2^x+1)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不等的实根.

令 $t=2^x$，则 $t>1$，

关于 t 的方程 $2t^2-(5+a)t+3-a=0$ 在 $(1,+\infty)$ 上有两个不等的实根，…………（9分）

所以 $\begin{cases}2-(5+a)+3-a>0,\\ \frac{a+5}{4}>1,\\ \Delta=(a+5)^2-8(3-a)>0,\end{cases}$ 解得 $4\sqrt{5}-9<a<0$，

所以 a 的取值范围为 $(4\sqrt{5}-9,0)$. …………（12分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。