

天一大联考
2021 届高中毕业班考前定位联合考试

理科数学 · 答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分.

1. 答案 C

命题意图 本题考查集合的交集.

解析 由 $\begin{cases} |y| = x^2, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x = -1, \\ y = -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 1, \\ y = -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -1, \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1 \end{cases}$, 故 $A \cap B$ 中含有 4 个元素.

2. 答案 B

命题意图 本题考查空间中直线的位置关系.

解析 画图可知, $MN \parallel CD_1$, $CD_1 \parallel BA_1$, $\therefore MN \parallel BA_1$. $\therefore MN \parallel CD_1$, $CD_1 \perp$ 平面 $AB_1C_1D_1$, $\therefore MN \perp$ 平面 $AB_1C_1D_1$, $\therefore MN \perp DB_1$, $MN \perp AC_1$, \therefore 满足条件的直线有 2 条.

3. 答案 A

命题意图 本题考查正弦定理的应用.

解析 因为 $4a \sin B = \sqrt{3}b \cos A + b \sin A$, 所以由正弦定理可得 $4 \sin A \sin B = \sqrt{3} \sin B \cos A + \sin B \sin A$, 因为 B 为三角形内角, 所以 $\sin B \neq 0$, 所以 $4 \sin A = \sqrt{3} \cos A + \sin A$, 即 $3 \sin A = \sqrt{3} \cos A$, 可得 $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 因为 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{6}$.

4. 答案 A

命题意图 本题考查复数的运算及充要条件.

解析 $\because z = \frac{1+2i}{1+i} = \frac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i+2i+2}{1+1} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$, $\therefore \left| \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i + bi \right| = \left| \frac{3}{2} + \left(b + \frac{1}{2}\right)i \right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{\sqrt{10}}{2}$, $\therefore -1 \leq b \leq 0$. 分析选项可知只有 A 正确.

5. 答案 D

命题意图 本题考查平均数及中位数.

解析 4 人的平均年收入为 25 万, 中位数为 20 万, 则中位数对平均数的占比为 $\frac{20}{25} = 0.8$, 由表可知对应的基尼系数为 0.363.

6. 答案 B

命题意图 本题考查函数模型的应用.

解析 2021 年的自投资金为 $5000 \times 1.1^5 \approx 5000 \times 1.6 = 8000$, 2021 年的扶贫资金为 $30000 - 5 \times 5000 = 5000$, 所以该贫困户 2021 年的年总收入约为 $1200 + 4.1 \times 5000 + 4.3 \times 8000 + 900 \times 2 = 57900$ (元).

7. 答案 C

命题意图 本题考查导数的几何意义.

解析 由题可知 $y' = x^2 - 2x$, 则曲线在点 $x = a$ 处的切线的斜率 $k = y'|_{x=a} = a^2 - 2a$. 由题可知 $a^2 - 2a = 1 - b \Rightarrow b = -a^2 + 2a + 1 = -(a-1)^2 + 2$, 当 $a = 1$ 时, b 的最大值为 2.

8. 答案 D

命题意图 本题考查抛物线的定义及直线与抛物线的位置关系.

解析 由题意, 得 $F(1,0)$. 又因为 $k = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故直线 AB 的方程为 $x = \sqrt{3}y + 1$. 与抛物线方程 $y^2 = 4x$ 联立, 得 $y^2 - 4\sqrt{3}y - 4 = 0$. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = 4\sqrt{3}, x_1 + x_2 = \sqrt{3}(y_1 + y_2) + 2 = 14$, 所以 $Q(7, 2\sqrt{3})$. 过 P 作 PH 垂直于准线于点 H , 根据抛物线的定义, 得 $|PF| + |PQ| = |PH| + |PQ| \geq |QH| \geq 7 + 1 = 8$.

9. 答案 C

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 由题意可得 $g(x) = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$, $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{8}, m\right]$ 上的值域为 $[-1, 3]$ 时, $0 \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$, 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{8}, m\right]$ 时, $2x + \frac{\pi}{4} \in \left[0, 2m + \frac{\pi}{4}\right]$, 而当 $x \in [0, \pi]$ 时, $y = \sin x \in [0, 1]$, $\therefore \frac{\pi}{2} \leq 2m + \frac{\pi}{4} \leq \pi$, $\therefore \frac{\pi}{8} \leq m \leq \frac{3\pi}{8}$.

10. 答案 A

命题意图 本题考查几何体的三视图及体积的计算.

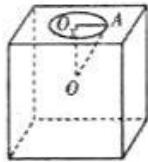
解析 由三视图可知该储糖罐的形状如图(1)所示. 设截面圆半径为 r , 球的半径为 R , 由题可知球心到某一截面的距离为正方体棱长的一半, 即为 4, $r = 3$, 故 $R^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, 得 $R = 5$, 所以球的体积 $V_1 = \frac{4}{3}\pi \times 5^3 = \frac{500}{3}\pi$.

如图(2), $OA = R = 5$, 且 $OO_1 = 4$, 则球缺的高 $h = R - OO_1 = 1$. 一个球缺的体积 $V_2 = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h) = \frac{14}{3}\pi$, 上

面圆柱的体积为 $V_3 = \pi \times 3^2 \times 1 = 9\pi$, 所以该储糖罐的体积 $V = V_1 - 6V_2 + V_3 = \frac{443}{3}\pi$.



图(1)



图(2)

11. 答案 A

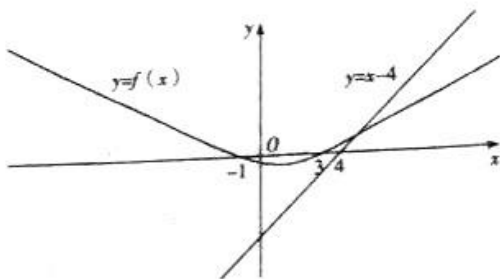
命题意图 本题考查双曲线的性质及圆的标准方程.

解析 由 $y = \frac{2x+2}{x-1} = 2 + \frac{4}{x-1}$ 可知此双曲线是由双曲线 $y = \frac{4}{x}$ 平移得来的, 对称中心为 $(1, 2)$, 双曲线 $y = \frac{4}{x}$ 绕原点顺时针转动 45° , 就会得到双曲线 $x^2 - y^2 = 8$, 所以焦距为 8, 所以所求圆的标准方程为 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$.

12. 答案 C

命题意图 本题考查导数在函数零点问题中的应用.

解析 由题可知 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , $f'(x) = \frac{e^{x-1}}{e^{x-1}+1} - \frac{1}{2} = \frac{2e^{x-1} - e^{x-1} - 1}{2(e^{x-1}+1)} = \frac{e^{x-1} - 1}{2(e^{x-1}+1)}$, 当 $x > 1$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增; 当 $x < 1$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减. 令 $f(x) = 0$, 可得 $x = 3$ 或 -1 . 因为函数 $g(x)$ 恰有 2 个零点, 结合图象(如图), 可知 $-1 < \lambda \leq 3$ 或 $\lambda > 4$.



二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 答案 -6

命题意图 本题考查向量的数量积.

解析 由题意, $A(0,0), B(4,1), |\vec{BC}| = \sqrt{(2-4)^2 + (t-1)^2} = 2\sqrt{2}, \therefore t=3, C(2,3), \vec{AB} \cdot \vec{BC} = (4,1) \cdot (-2,2) = -6.$

14. 答案 -14

命题意图 本题考查二项式定理.

解析 因为 $(x - \frac{1}{x})(1-x)^7 = x(1-x)^7 - \frac{1}{x}(1-x)^7$, 所以 x^3 的系数为 $C_7^2(-1)^2 - C_7^4(-1)^4 = -14.$

15. 答案 $\frac{\sqrt{4-a^2}}{a}$

命题意图 本题考查同角三角函数关系.

解析 $\sqrt{1-2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}} + \sqrt{1+2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}}$
 $= \sqrt{\sin^2\frac{1}{2} - 2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2} + \cos^2\frac{1}{2}} + \sqrt{\sin^2\frac{1}{2} + 2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2} + \cos^2\frac{1}{2}}$
 $= \sqrt{(\sin\frac{1}{2} - \cos\frac{1}{2})^2} + \sqrt{(\sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2})^2}$
 $= \cos\frac{1}{2} - \sin\frac{1}{2} + \sin\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2}$
 $= 2\cos\frac{1}{2} = a, \text{ 则 } \cos\frac{1}{2} = \frac{a}{2}, \text{ 而 } 1 + \tan^2\frac{1}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}}, \therefore \tan^2\frac{1}{2} = \frac{4}{a^2} - 1,$

又 $\tan\frac{1}{2} > 0, \therefore \tan\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{4-a^2}}{a}.$

16. 答案 ②③

命题意图 本题考查数学文化.

解析 曲线 $D: |x| + |y| = a$ 的周长为 $4\sqrt{2}a < 6a$, 所以①错误; 曲线 C 上左右两端点 $(-a, 0), (a, 0)$ 或上下两端点 $(0, a), (0, -a)$ 的距离最近, 等于 $2a$, ②正确; 曲线 C 上一点到原点的最短距离为 $\frac{1}{2}a$, 此类点共有 4 个, 故曲线 C 与圆 $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ 有且仅有 4 个公共点, ③正确; 不妨设点 $P(x, y)$ 为第一象限上的点, 则 $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \geq 2\sqrt{x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}}} = 2x^{\frac{1}{6}} \cdot y^{\frac{1}{6}}, \therefore xy \leq \frac{a^2}{8}$, ④错误.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. 命题意图 本题考查等比数列的通项公式及错位相减法.

解析 (I) 由 $\begin{cases} 6a_1 = a_2 + a_3, \\ a_2 = 4, \end{cases}$ (2分)

解得 $a_1 = q = 2$, 所以 $a_n = 2^n$ (3分)

当 $n \geq 2$ 时, $b_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n$, (5分)

又 $b_1 = S_1 = 1$ 也符合上式, 所以 $b_n = n$ (6分)

(II) 由 (I) 可知 $a_n b_n = n \cdot 2^n$.

设 $T = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n$,
则 $2T = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \dots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1}$, (7分)

两式相减得 $-T = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n - n \cdot 2^{n+1} = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - n \cdot 2^{n+1} = (1 - n) \cdot 2^{n+1} - 2$.

$\therefore T = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (9分)

$\therefore (n+m)a_{n+1} = n \cdot 2^{n+1} + m \cdot 2^{n+1} \geq (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$,

即 $m \geq -1 + \frac{1}{2^n}$ 对任意正整数 n 恒成立, (10分)

当 $n=1$ 时, $-1 + \frac{1}{2^n}$ 取最大值 $-\frac{1}{2}$.

$\therefore m \geq -\frac{1}{2}$,

$\therefore m$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$ (12分)

18. 命题意图 本题考查空间线面位置关系及利用空间向量求二面角的余弦值

解析 (I) 如图, 过 E 点作 $EF \parallel A_1A$ 交 A_1C 于点 F , 连接 DF .

$\because BB_1 \parallel A_1A, \therefore EF \parallel BB_1, \therefore EF$ 与 BB_1 确定一个平面. (2分)

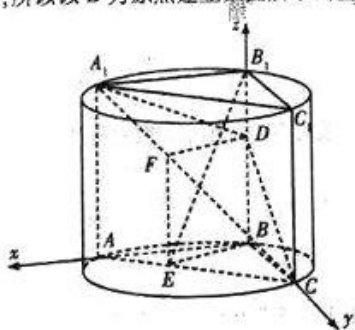
$\because BE \parallel$ 平面 A_1CD , 平面 $A_1CD \cap$ 平面 $DBEF = DF, \therefore BE \parallel DF$.

\therefore 四边形 $DBEF$ 为平行四边形, $\therefore DB = EF$ (4分)

又 $\frac{AC}{AE} = 3, \therefore \frac{EF}{A_1A} = \frac{CE}{AC} = \frac{2}{3}$,

$\therefore \frac{BD}{B_1B} = \frac{EF}{A_1A} = \frac{2}{3}, \frac{B_1D}{BB_1} = \frac{1}{3}$ (6分)

(II) 由题意知 BA, BC, BB_1 两两垂直, 所以以 B 为原点建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $BA = BC = BB_1 = 2$, 则 $B(0,0,0), B_1(0,0,2), C(0,2,0), D(0,0,\frac{4}{3}), A_1(2,0,2), E(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0)$.

$\therefore \vec{B_1E} = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -2), \vec{BE} = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0), \vec{CD} = (0, -2, \frac{4}{3}), \vec{A_1C} = (-2, 2, -2)$ (7分)

设平面 A_1CD 的法向量为 $m = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{A_1C} \cdot \mathbf{m} = 0, \\ \overrightarrow{CD} \cdot \mathbf{m} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} -2x_1 + 2y_1 - 2z_1 = 0, \\ -2y_1 + \frac{4}{3}x_1 = 0, \end{cases} \text{令 } z_1 = 3, \text{得 } \mathbf{m} = (-1, 2, 3). \quad \dots\dots (8 \text{分})$$

设平面 B_1BE 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{B_1E} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{BE} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} \frac{4}{3}x_2 + \frac{2}{3}y_2 - 2z_2 = 0, \\ \frac{4}{3}x_2 + \frac{2}{3}y_2 = 0, \end{cases} \text{令 } x_2 = 1, \text{得 } \mathbf{n} = (1, -2, 0). \quad \dots\dots (10 \text{分})$$

$$\text{设平面 } B_1BE \text{ 与平面 } A_1CD \text{ 所成锐二面角为 } \theta, \text{ 则 } \cos \theta = |\cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|} = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{14}} = \frac{\sqrt{70}}{14},$$

$$\therefore \text{平面 } B_1BE \text{ 与平面 } A_1CD \text{ 所成锐二面角的余弦值为 } \frac{\sqrt{70}}{14}. \quad \dots\dots (12 \text{分})$$

19. 命题意图 本题考查概率的计算.

解析 (I) 该服装店前 3 年卖的品牌有 4 种情况:

“甲、甲、甲”的概率为 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, 利润为 $7 + 7.5 + 8 = 22.5$ 万元;

“甲、甲、乙”的概率为 $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$, 利润为 $7 + 7.5 + 11 = 25.5$ 万元;

“甲、乙、甲”的概率为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, 利润为 $7 + 10.5 + 8 = 25.5$ 万元;

“甲、乙、乙”的概率为 $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, 利润为 $7 + 10.5 + 11 = 28.5$ 万元. $\dots\dots (4 \text{分})$

所以前 3 年的利润之和超过 25 万元的概率为 $\frac{2}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{5}{9}$. $\dots\dots (6 \text{分})$

(II) 由 (I) 知该服装店前 3 年卖甲品牌的概率为 $\frac{4}{9} + \frac{1}{12} = \frac{19}{36}$, 卖乙品牌的概率为 $\frac{2}{9} + \frac{1}{4} = \frac{17}{36}$, 所以第四年

卖甲品牌的概率为 $\frac{19}{36} \times \frac{2}{3} + \frac{17}{36} \times \frac{1}{4} = \frac{203}{432}$. $\dots\dots (8 \text{分})$

从而第四年卖乙品牌的概率为 $1 - \frac{203}{432} = \frac{229}{432}$. $\dots\dots (9 \text{分})$

又第四年卖甲品牌的利润为 8.5 万元, 卖乙品牌的利润为 11.5 万元. $\dots\dots (10 \text{分})$

因此第四年的利润的数学期望为 $8.5 \times \frac{203}{432} + 11.5 \times \frac{229}{432} = \frac{1453}{144}$. $\dots\dots (12 \text{分})$

20. 命题意图 本题考查椭圆的方程及直线与椭圆的位置关系.

解析 (I) 根据题意, $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\dots\dots (1 \text{分})$

又 $\frac{1}{2} \cdot 2b \cdot 2c = 2$, $\dots\dots (2 \text{分})$

解得 $a = \sqrt{2}, b = 1$, $\dots\dots (3 \text{分})$

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$. $\dots\dots (4 \text{分})$

(II) 存在点 $P\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right)$ 或 $P\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right)$ 满足条件, 理由如下:

由题意, $\sqrt{|MP|^2 + |NP|^2} = \sqrt{3} |MP| \cdot |NP| \Leftrightarrow \frac{1}{|MP|^2} + \frac{1}{|NP|^2} = 3$.

设点 P 的坐标为 $(m, 0)$ ($-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$).

当直线 MN 的斜率为零时, 点 M, N 为椭圆长轴的端点,

$$\text{则 } \frac{1}{|MP|^2} + \frac{1}{|NP|^2} = \frac{1}{(\sqrt{2}-m)^2} + \frac{1}{(\sqrt{2}+m)^2} = \frac{(\sqrt{2}+m)^2 + (\sqrt{2}-m)^2}{(2-m^2)^2} = 3,$$

$$\text{解得 } m = \pm \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ 或 } m = \pm 2 \text{ (舍去)}. \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

当直线 MN 的斜率不为 0 时, 设直线 MN 的方程为 $x = ty + m$, 设点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x = ty + m, \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 消去 } x \text{ 得 } (t^2 + 2)y^2 + 2tmy + m^2 - 2 = 0.$$

$$\text{由根与系数的关系得 } y_1 + y_2 = -\frac{2mt}{t^2 + 2}, y_1 y_2 = \frac{m^2 - 2}{t^2 + 2}. \quad \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$$

$$\text{因此, } \frac{1}{|MP|^2} + \frac{1}{|NP|^2} = \frac{1}{(1+t^2)y_1^2} + \frac{1}{(1+t^2)y_2^2} = \frac{y_1^2 + y_2^2}{(1+t^2)y_1^2 y_2^2} = \frac{(y_1 + y_2)^2 - 2y_1 y_2}{(1+t^2)y_1^2 y_2^2} = \frac{\frac{4m^2 t^2}{(t^2 + 2)^2} - 2 \cdot \frac{m^2 - 2}{t^2 + 2}}{(1+t^2) \cdot \frac{(m^2 - 2)^2}{(t^2 + 2)^2}} = 3,$$

$$\dots\dots\dots (9 \text{ 分})$$

$$\text{整理可得 } (-3m^4 + 14m^2 - 8)t^2 + (-3m^4 + 8m^2 - 4) = 0, \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

$$\text{故 } \begin{cases} -3m^4 + 14m^2 - 8 = 0, \\ -3m^4 + 8m^2 - 4 = 0, \end{cases} \text{ 解得 } m = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}. \quad \dots\dots\dots (11 \text{ 分})$$

故存在点 $P(\frac{\sqrt{6}}{3}, 0)$ 或 $P(-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0)$ 满足条件. $\dots\dots\dots (12 \text{ 分})$

21. 命题意图 本题考查导数在函数问题中的应用.

解析 (1) 设 $g(x) = \lambda x^2 + \ln(\text{ch } x) = \lambda x^2 - \ln 2 + \ln(e^x + e^{-x})$.

$\because g(x)$ 为偶函数, \therefore 只需 $x \geq 0$ 时 $g(x) \leq 0$.

$$g(0) = 0, g'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + 2\lambda x, g'(0) = 0. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{令 } m(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + 2\lambda x, \text{ 则 } m'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} + 2\lambda = \frac{4}{e^{2x} + e^{-2x} + 2} + 2\lambda \leq 1 + 2\lambda. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

① 当 $\lambda \leq -\frac{1}{2}$ 时, $m'(x) \leq 0, \therefore \forall x \geq 0, g'(x)$ 单调递减, $g'(x) \leq g'(0) = 0, g(x)$ 单调递减,
 $\therefore \forall x \geq 0, g(x) \leq 0$ 恒成立. $\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$

② 当 $\lambda \geq 0$ 时, $m'(x) > 0, \therefore \forall x \geq 0, g'(x)$ 单调递增, $g'(x) \geq g'(0) = 0, g(x)$ 单调递增,
 $\therefore \forall x \geq 0, g(x) \geq 0$ 恒成立, 不满足题意. $\dots\dots\dots (4 \text{ 分})$

③ 当 $-\frac{1}{2} < \lambda < 0$ 时, 若 $\lambda \in (0, \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}\lambda + 1 - \sqrt{2}\lambda - 1}{\lambda})$, 则 $m'(x) > 0, g'(x)$ 单调递增, $g'(x) > g'(0) = 0$,
 $g(x)$ 单调递增, $g(x) > g(0) = 0$, 不满足题意.

综上 $\lambda \leq -\frac{1}{2}$. $\dots\dots\dots (5 \text{ 分})$

(II) (i) $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$. $\dots\dots\dots (7 \text{ 分})$

(ii) 由条件知 $(2\text{ch } x)_{\min} < [a(-\text{ch}^2 x + 4\text{sh } x - 1)]_{\min}$.

$$\because (\text{ch } x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \therefore \text{当 } x \geq 1 \text{ 时 } (\text{ch } x)' > 0,$$

$\therefore y = \operatorname{ch} x$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore \operatorname{ch} x \geq \operatorname{ch} 1$, 即 $(2\operatorname{ch} x)_{\min} = 2\operatorname{ch} 1 = e + \frac{1}{e}$. (8分)

令 $h(x) = a(-\operatorname{ch}^2 x + 4\operatorname{sh} x - 1)$, 则 $h(x) = a(-1 - \operatorname{sh}^2 x + 4\operatorname{sh} x - 1) = a[-(\operatorname{sh} x - 2)^2 + 2]$.

$\because a > 0, x \geq 1, y = \operatorname{sh} x$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore \frac{e - e^{-1}}{2} \leq \operatorname{sh} x$,

$\therefore h(x)_{\min} = 2a$. (9分)

$\therefore e + \frac{1}{e} < 2a$, 即 $a > \frac{1}{2}(e + \frac{1}{e})$. (10分)

设 $t(a) = (e-1)\ln a - a + 1$, 则 $t'(a) = \frac{e-1}{a} - 1 = \frac{e-1-a}{a}, a > \frac{1}{2}(e + \frac{1}{e})$.

当 $\frac{1}{2}(e + \frac{1}{e}) < a < e-1$ 时, $t'(a) > 0, t(a)$ 单调递增, 当 $a > e-1$ 时, $t'(a) < 0, t(a)$ 单调递减,

$\therefore t(a)$ 至多有两个零点, 而 $t(1) = t(e) = 0$. (11分)

\therefore 当 $a > e$ 时, $t(a) < 0, (e-1)\ln a < a-1$;

当 $\frac{1}{2}(e + \frac{1}{e}) < a < e$ 时, $t(a) > 0, (e-1)\ln a > a-1$;

当 $a = e$ 时, $t(a) = 0, (e-1)\ln a = a-1$. (12分)

22. 命题意图 本题考查参数方程与普通方程的互化, 极坐标方程与直角坐标方程的互化.

解析 (I) 直线 l_1 的参数方程消去参数 m , 得普通方程为 $y = \frac{1}{k}(x+2)$. (1分)

利用 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases}$ 得 l_1 的直角坐标方程为 $y = k(x-2)$. (2分)

设 $P(x, y)$, 由题设得 $\begin{cases} y = k(x-2), \\ y = \frac{1}{k}(x+2). \end{cases}$

消去 y 得 $x^2 - y^2 = 4 (y \neq 0)$.

所以 C_2 的普通方程为 $x^2 - y^2 = 4 (y \neq 0)$. (4分)

故 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 \cos 2\theta = 4 (\rho \sin \theta \neq 0)$. (5分)

(II) 将 $C_1: \begin{cases} x = 4\cos^2 \alpha, \\ y = 4\sin \alpha \cos \alpha \end{cases}$ (α 为参数) 消去参数, 可得 $(x-2)^2 + y^2 = 4$. (6分)

化为极坐标方程为 $\rho = 4\cos \theta$. (7分)

令 $\theta = \frac{\pi}{6}$, 则 $|OA| = 4\cos \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}, |OB| = \sqrt{\frac{4}{\cos^2 \frac{\pi}{3}}} = 2\sqrt{2}$. (8分)

所以 $|AB| = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} = 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$. (10分)

23. 命题意图 本题考查绝对值不等式的解法及基本不等式的应用.

解析 (I) $f(x) = |x-1| + 2|x| = \begin{cases} -3x+1, & x \leq 0, \\ x+1, & 0 < x < 1, \\ 3x-1, & x \geq 1. \end{cases}$ (1分)

当 $x \leq 0$ 时, 由 $f(x) \geq 2$, 得 $-3x+1 \geq 2$, 解得 $x \leq -\frac{1}{3}$; (2分)

当 $0 < x < 1$ 时, 由 $f(x) \geq 2$, 得 $x+1 \geq 2$, 无解; (3分)

当 $x \geq 1$ 时, 由 $f(x) \geq 2$, 得 $3x-1 \geq 2$, 解得 $x \geq 1$. (4分)

所以 $f(x) \geq 2$ 的解集为 $\left\{x \mid x \leq -\frac{1}{3} \text{ 或 } x \geq 1\right\}$ (5分)

(II) 由(I)可知, $f(x) = 2$ 时, $x = -\frac{1}{3}$ 或 $x = 1$, $f(x)$ 的图象与直线 $y = 2$ 围成的图形为三角形, 该三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times 1 \times \left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{2}{3}$, 所以 $a + b + c = \frac{2}{3}$ (6分)

$$\begin{aligned} \text{因为 } \frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} &= \frac{3}{2}(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c}\right) \\ &= \frac{3}{2} \left(14 + \frac{4a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{9a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{9b}{c} + \frac{4c}{b}\right) \\ &\geq \frac{3}{2} \left(14 + 2\sqrt{\frac{4a}{b} \cdot \frac{b}{a}} + 2\sqrt{\frac{9a}{c} \cdot \frac{c}{a}} + 2\sqrt{\frac{9b}{c} \cdot \frac{4c}{b}}\right) = 54. \end{aligned} \dots\dots (8分)$$

所以 $bc + 4ac + 9ab \geq 54abc$ (10分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料:

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》