2023年邵阳市高三第二次联考试题参考答案与评分标准

数　学

一、选择题(本大题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. C　2. B　3. A　4. C　5. C

6. A

【详解】由$\frac{a}{\sin\angle PF_1F_2}=\frac{c}{\sin\angle PF_2F_1}$,得$\frac{c}{a}=\frac{\sin\angle PF_2F_1}{\sin\angle PF_1F_2}=\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|PF_1|}{2a-|PF_1|}$得$|PF_1|=\frac{2ac}{a+c}$,

又$|PF_1|\in[a-c,a+c]$

$\therefore a^2-c^2\leqslant 2ac\leqslant(a+c)^2$ 即 $e^2+2e-1\geqslant 0$,

又 $e\in(0,1)$,$\therefore e\in[\sqrt{2}-1,1)$.

故选:A.

7. D

【详解】选项A:当点E固定在线段CD的某位置时,线段AE的长度为定值,$AD'\perp D'E$,过D'作$D'H\perp AE$于点H,故D'的轨迹是以H为圆心,$D'H$为半径的圆,故A错;

选项B:无论E在CD(端点除外)的哪个位置,AB均不与AE垂直,故AB不与平面$AD'E$垂直,故B错;

选项C:设A到平面BCF的距离为d,由已知$BF=2\sqrt{3}$,$BC\perp$平面ABF,得$d=\frac{3\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{2}$,故C错;

选项D:以$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}$为$x,y,z$的正方向建立空间直角坐标系$F(0,0,3)$,$B(\sqrt{3},0,0)$,$C(\sqrt{3},1,0)$.设$E(\sqrt{3}\lambda,1,0)$,$\lambda\in(0,1)$,$\overrightarrow{BC}=(0,1,0)$,$\overrightarrow{EF}=(-\sqrt{3}\lambda,-1,3)$,设$EF$与$BC$所成的角为$\theta$,则$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3\lambda^2+10}}\in\left(\frac{\sqrt{13}}{13},\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$.

故选:D.

8. B

【详解】$x\geqslant 2e+1$,$te^{tx}-\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(x-1)\geqslant 0$恒成立,

即 $txe^{tx}\geqslant(x-1)\ln(x-1)=e^{\ln(x-1)}\cdot\ln(x-1)$恒成立.

令$f(x)=xe^x(x>1)$,则$f'(x)=(x+1)e^x>0$恒成立,故$f(x)$单调递增,

所以$tx\geqslant\ln(x-1)$在$x\geqslant 2e+1$时恒成立,

$\therefore t\geqslant\frac{\ln(x-1)}{x}(x\geqslant 2e+1)$恒成立.

令$g(x)=\frac{\ln(x-1)}{x}(x\geqslant 2e+1)$,

$g'(x)=\dfrac{\dfrac{x}{x-1}-\ln(x-1)}{x^2}=\dfrac{x-(x-1)\ln(x-1)}{x^2(x-1)}$.

令 $h(x)=x-(x-1)\ln(x-1)(x\geqslant 2e+1)$，则 $h'(x)=-\ln(x-1)<0$

$\therefore h(x)$ 单调递减. $\therefore h(x)\leqslant h(2e+1)=2e+1-(2e+1-1)\cdot\ln(2e+1-1)=1-2e\ln2=1-e\ln4<0$ 即 $g'(x)<0$，$\therefore g(x)$ 单调递减.

故 $g(x)\leqslant g(2e+1)=\dfrac{\ln2+1}{2e+1}$.

故选：B.

二、多选题（本大题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的四个选项中，有多项是符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分）

9. BCD　10. BC

11. ACD

【详解】分以下几种情况讨论：设定圆 O 的半径为 R，

①当点 A 在圆 O 上，连接 OA，则 $|OA|=|OP|$，所以点 O 在线段 AP 的中垂线上，

由中垂线的性质可知 $|AQ|=|PQ|$.

又因为点 Q 是线段 AP 的中垂线与 OP 的公共点，此时点 Q 与点 O 重合，

此时，点 Q 的轨迹为圆心 O；故 A 正确；

②当点 A 在圆 O 内，且点 A 不与圆心 O 重合，

连接 AQ，由中垂线的性质可得 $|QA|=|QP|$，

所以，$|QA|+|QO|=|QA|+|QP|=|OP|=R>|OA|$，

此时，点 Q 的轨迹是以点 A，O 为焦点，且长轴长为 R 的椭圆，故 C 正确；

③当点 A 在圆 O 外：连接 AQ，由中垂线的性质可得 $|QA|=|QP|$，

所以，$||QA|-|QO||=||QP|-|QO||=|OP|=R<|OA|$，

此时，点 Q 的轨迹是以点 A，O 为焦点，且实轴长为 R 的双曲线. 故 D 正确.

故选：ACD.

12. ABD

【详解】$f'(x)=e^x\cdot\ln(1+x)+e^x\cdot\dfrac{1}{1+x}=e^x\left[\ln(1+x)+\dfrac{1}{1+x}\right]$，

$g(x)=f'(x)=e^x\left[\ln(1+x)+\dfrac{1}{1+x}\right]$，则 $g'(x)=e^x\left[\ln(1+x)+\dfrac{2}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^2}\right]$，

设 $h(x)=\ln(1+x)+\dfrac{2}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^2}$，

$h'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{2}{(1+x)^2}+\dfrac{2}{(1+x)^3}=\dfrac{x^2+1}{(1+x)^3}>0$，

则函数 $h(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，$h(x)\geqslant h(0)=1>0$，因此 $g'(x)>0$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 A 正确；

又 $h\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\ln2+4-4<0$，所以 $h\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot h(0)<0$，则存在 $\alpha\in\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$，使得 $h(\alpha)=0$.

在 $x\in(-1,\alpha)$ 时，$h(x)<0$；$x\in(\alpha,+\infty)$ 时，$h(x)>0$；

所以函数 $f'(x)$ 在 $(-1,\alpha)$ 单调递减，在 $(\alpha,+\infty)$ 单调递增，故 $f'(x)$ 有唯一极小值，故 B 正确；

令 $m(x)=f(x)-x=e^x\ln(x+1)-x,-1<x<0,m'(x)=e^x[\ln(1+x)+\dfrac{1}{1+x}]-1=f'(x)-1$，

所以函数 $m'(x)$ 在 $(-1,\alpha)$ 单调递减，在 $(\alpha,+\infty)$ 单调递增，且 $m'(0)=0$，则有 $m'(\alpha)<0$.

又 $m'(e^{-2}-1)=e^{e^{-2}-1}(-2+e^2)-1>e^{e^{-2}-1}\cdot e-1=e^{e^{-2}}-1>0$，

因此存在 $x_0\in(e^{-2}-1,\alpha)$，使得 $m'(x_0)=0$，

当 $-1<x<x_0$ 时，$m'(x)>0$，当 $x_0<x<0$ 时，$m'(x)<0$，

于是得函数 $m(x)$ 在 $(-1,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,0)$ 上单调递减，则 $m(x_0)>m(0)=0$.

又 $m(e^{-3}-1)=-3e^{e^{-3}-1}-e^{-3}+1<-3e^{-1}-e^{-3}+1<0$，

从而存在唯一 $t\in(e^{-3}-1,x_0)$，使得 $m(t)=0$.

显然当 $t<x<0$ 时，$m(x)>0$，当 $-1<x<t$ 时，$m(x)<0$.

又 $m(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{\sqrt{e}}\ln\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}$，令 $v(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{1}{x})$，

$v'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2x^2}=-\dfrac{(x-1)^2}{2x^2}\leqslant 0$，

因此函数 $v(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$v(\dfrac{1}{2})>v(1)=0$，

有 $\ln\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2}-2)=-\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{1}{\sqrt{e}}\ln\dfrac{1}{2}>-\dfrac{3}{4\sqrt{e}}$，则 $m(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{\sqrt{e}}\ln\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4\sqrt{e}}=\dfrac{2\sqrt{e}-3}{4\sqrt{e}}>0$，

即 $t<-\dfrac{1}{2}<0$，从而函数 $m(x)=f(x)-x$ 在 $x\in(-1,0)$ 上有唯一零点 $t\in(-1,-\dfrac{1}{2})$，

函数 $y=f(x)-x$ 在 $(-1,0)$ 上有且只有一个零点 t，且 $t\in\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$，故 C 错误；

$x_1>0,x_2>0,f(x_1+x_2)-f(x_1)-f(x_2)=e^{x_1+x_2}\ln(1+x_1+x_2)-e^{x_1}\ln(1+x_1)-e^{x_2}\ln(1+x_2)$，

设 $\varphi(x)=f(x+x_2)-f(x)-f(x_2)=e^{x+x_2}\ln(1+x+x_2)-e^x\ln(1+x)-e^{x_2}\ln(1+x_2),x>0$，

则 $\varphi'(x)=e^{x+x_2}[\ln(1+x+x_2)+\dfrac{1}{1+x+x_2}]-e^x[\ln(1+x)+\dfrac{1}{1+x}]=g(x+x_2)-g(x)$

由选项 A 知，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，而 $x+x_2>x>0$，则 $g(x+x_2)>g(x)$，

即有 $\varphi'(x)=g(x+x_2)-g(x)>0$，因此函数 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\varphi(x_1)>\varphi(0)=f(x_2)-f(0)-f(x_2)=-f(0)=0$，即有 $f(x_1+x_2)>f(x_1)+f(x_2)$，

所以对任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，总满足 $f(x_1+x_2)>f(x_1)+f(x_2)$，故 D 正确.

故选：ABD

三、填空题（本大题 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 8　14. 36

15. $\left(\dfrac{3+\ln2}{2},0\right)$

【详解】设直线 l 与曲线 $y=\ln(x-2)+2$ 和 $y=\ln(x-1)$ 相切于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点，

分别求导得：$y'=\dfrac{1}{x-2}$，$y'=\dfrac{1}{x-1}$，

故 l：$y-[\ln(x_1-2)+2]=\dfrac{1}{x_1-2}(x-x_1)\Rightarrow y=\dfrac{1}{x_1-2}x+\ln(x_1-2)+2-\dfrac{x_1}{x_1-2}$.

同理得：l：$y-\ln(x_2-1)=\dfrac{1}{x_2-1}(x-x_2)\Rightarrow y=\dfrac{1}{x_2-1}x+\ln(x_2-1)-\dfrac{x_2}{x_2-1}$.

故 $\begin{cases}\dfrac{1}{x_1-2}=\dfrac{1}{x_2-1},\\ \ln(x_1-2)+2-\dfrac{x_1}{x_1-2}=\ln(x_2-1)-\dfrac{x_2}{x_2-1},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_2=\dfrac{3}{2},\\ x_1=\dfrac{5}{2}.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y=2x-3-\ln2$.

令 $y=0$，则 $x=\dfrac{3+\ln2}{2}$.

则直线 l 与 x 轴的交点坐标为 $\left(\dfrac{3+\ln2}{2},0\right)$.

16. $(n^2+n)\cdot2^{n-1}$（2 分）　$(n^2-n+2)\cdot2^n$（3 分）

【详解】因为 $na_{n+1}=2(n+2)a_n$，且 $a_1=2\neq0$，

所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2(n+2)}{n}$，

则当 $n\geqslant2$ 时，

$$\begin{aligned}a_n&=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\\&=2\times\frac{2\times3}{1}\times\frac{2\times4}{2}\times\cdots\times\frac{2\times(n+1)}{(n-1)}\\&=n(n+1)\cdot2^{n-1}\\&=(n^2+n)\cdot2^{n-1}.\end{aligned}$$

又当 $n=1$ 时，$a_1=2$ 符合上式，

故 $a_n=(n^2+n)\cdot2^{n-1}$.

由 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$

$=(1\times2)\times2^0+(2\times3)\times2^1+\cdots+n(n+1)\cdot2^{n-1}$　①

$2S_n=\qquad 1\times2\times2^1+\cdots+(n-1)n\cdot2^{n-1}+n(n+1)\cdot2^n$　②

①−②得 $-S_n=2-n(n+1)\cdot2^n+4\cdot2^1+6\cdot2^2+\cdots+2n\cdot2^{n-1}$

$=-n(n+1)\cdot2^n+(1\cdot2^1+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+n\cdot2^n)$.

令 $T_n=1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$, ③

$\therefore 2T_n=\quad 1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}$,④

③-④得 $-T_n=2^1-n\cdot 2^{n+1}+(2^2+2^3+\cdots+2^n)=-n\cdot 2^{n+1}+\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}=(-n+1)\cdot 2^{n+1}-2$,

$\therefore T_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$.

故 $-S_n=-n(n+1)\cdot 2^n+(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$,

则 $S_n=(n^2-n+2)\cdot 2^n-2$,即 $S_n+2=(n^2-n+2)\cdot 2^n$.

四、解答题(本大题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17.【详解】(1)由 $S_{n+1}=S_n+4a_n-3$,得 $S_{n+1}-S_n=4a_n-3$.

$\therefore a_{n+1}=4a_n-3$,则 $a_{n+1}-1=4(a_n-1)$. ……(2分)

$\because a_1-1=2-1=1$,

$\therefore$ 数列 $\{a_n-1\}$ 是以1为首项,4为公比的等比数列,

$\therefore a_n-1=4^{n-1}=2^{2n-2}(n\in\mathbf{N}^*)$. ……(4分)

$\because b_n=\log_2(a_n-1)+3$,

$\therefore b_n=\log_2 2^{2n-2}+3=2n+1(n\in\mathbf{N}^*)$. ……(5分)

(2)$\because c_n=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{b_n+1}{b_nb_{n+1}}$

$\therefore c_n=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{2n+2}{(2n+1)(2n+3)}=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+3}\right)$ ……(6分)

$\therefore T_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n$

$=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}\right)-\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}\right)+\left(\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}\right)-\cdots+(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+3}\right)\right]$ ……(7分)

当 n 为奇数时,

$T_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2n+3}\right)>\dfrac{1}{6}>\dfrac{2}{21}$. ……(8分)

当 n 为偶数时,

$T_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2n+3}\right)$

$\{T_n\}$ 是递增数列,

$\therefore T_n\geqslant T_2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{7}\right)=\dfrac{2}{21}$.

综上得:$T_n\geqslant\dfrac{2}{21}$. ……(10分)

18.【详解】(1)由题意可知 $\angle APC=45°$, $\angle CBP=60°$, $\angle BAC=45°-15°=30°$ ……(1分)

$AC=\dfrac{PC}{\tan\angle APC}=100\sqrt{3}$ m, $BC=\dfrac{PC}{\tan\angle CBP}=100$ m. ……(2分)

由正弦定理 $\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}$,可得 $\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……(3分)

因此$\angle ABC=60^\circ$或120°当$\angle ABC=60^\circ$时，$\angle ACB=90^\circ$，猎豹与羚羊之间的距离为$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=200$ m ……………………（5分）

当$\angle ABC=120^\circ$，$\angle ACB=30^\circ=\angle BAC$，猎豹与羚羊之间的距离为$AB=BC=100$ m ……（6分）

（2）设捕猎成功所需的最短时间为t，

在$\triangle ABQ$中，$BQ=20t$，$AQ=25t$，$AB=200$，$\angle ABQ=120^\circ$.

由余弦定理得：$625t^2=400t^2+200^2-2\times20t\times200\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$. ……………………（8分）

整理得：$5t^2-32t-320=0$.

方法1：设$f(t)=5t^2-32t-320$，显然$f\left(\dfrac{16}{5}\right)<0$，……………………（9分）

因猎豹能坚持奔跑最长时间为24 s，且$f(24)=1792>0$. ……………………（10分）

$\therefore$存在$t_0\in\left(\dfrac{16}{5},24\right)$，使$f(t_0)=0$. ……………………（11分）

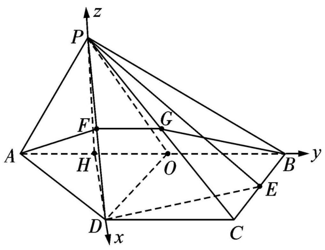
$\because t_0<24$，$\therefore$猎豹能捕猎成功. ……………………（12分）

方法2：由方程$5t^2-32t-320=0$得$t=\dfrac{16+8\sqrt{29}}{5}$（舍负）. ……………………（10分）

又$16+8\sqrt{29}<16+8\times6=64<120$，$\therefore t<24$，

$\therefore$猎豹能捕猎成功. ……………………（12分）

19. **解**：（1）如图所示，取AO的中点H，连结HD，HP，



在等腰梯形$ABCD$中，$AB//CD$，$AB=4$，$CD=2$，$\angle DAO=60^\circ$.

$\because O$为AB的中点，

$\therefore OD//BC$，$\angle DOA=\angle CBO=\angle DAO=60^\circ$.

$\therefore \triangle OAD$为正三角形，$\therefore AD=2$，$HD\perp AO$. …（2分）

在$\triangle AOP$中，$OA=OP=2$，$\angle AOP=60^\circ$，

$\therefore \triangle AOP$为边长为2的正三角形，$\therefore AP=2$，$PH\perp AO$.
……………………（3分）

$\therefore AP=AD$，又F为FD的中点，$\therefore AF\perp PD$.

$\because HD\perp AO$，$PH\perp AO$，$HD\cap PH=H$，

$\therefore AO\perp$平面PHD，即$AB\perp$平面PHD. ……………………（4分）

$\because PD\subset$平面PHD，$\therefore AB\perp PD$.

又$\because AF\cap AB=A$，$\therefore PD\perp$平面$AFGB$. ……………………（5分）

$\because PD\subset$平面PCD，$\therefore$平面$PCD\perp$平面$AFGB$. ……………………（6分）

（2）$\because PH\perp AB$，平面$PAB\perp$平面$ABCD$，平面$PAB\cap$平面$ABCD=AB$，$PH\subset$平面PAB，

$\therefore PH\perp$平面$ABCD$，

$\therefore$由（1）知，PH，HD，AB两两垂直，……………………（7分）

以H为坐标原点，HD，HB，HP所在直线分别为x轴，y轴，z轴建立如图所示空间直角坐标系，

则$H(0,0,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，$D(\sqrt{3},0,0)$，，$E\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{5}{2},0\right)$，

于是 $\overrightarrow{HP}=(0,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PD}=(\sqrt{3},0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DE}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{5}{2},0\right)$. ………………………… (9 分)

设平面 PDE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}x-\sqrt{3}z=0,\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{5}{2}y=0,\end{cases}$ 取 $x=5$，则 $\vec{n}=(5,\sqrt{3},5)$ ………………………… (10 分)

设平面 PDE 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角为 θ，

$\because$ $\overrightarrow{HP}$ 为平面 $ABCD$ 的一个法向量，

$\therefore \cos\theta=|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{HP}\rangle|=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{HP}|}{|\vec{n}||\overrightarrow{HP}|}=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{53}\times\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{53}}$.

$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{53}}$，$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2\sqrt{7}}{5}$.

$\therefore$ 平面 PDE 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角的正切值为 $\frac{2\sqrt{7}}{5}$. ………………………… (12 分)

20.【详解】(1)由题可知

P(每次扑出点球)$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{3}$. ………………………… (1 分)

X 的所有可能取值为 0，1，2，3，4. ………………………… (2 分)

$\therefore P(X=0)=C_4^0\times(\frac{1}{3})^0\times(\frac{2}{3})^4=\frac{16}{81}$.

$P(X=1)=C_4^1\times(\frac{1}{3})\times(\frac{2}{3})^3=\frac{32}{81}$.

$P(X=2)=C_4^2\times(\frac{1}{3})^2\times(\frac{2}{3})^2=\frac{24}{81}$.

$P(X=3)=C_4^3\times(\frac{1}{3})^3\times(\frac{2}{3})=\frac{8}{81}$.

$P(X=4)=C_4^4\times(\frac{1}{3})^4=\frac{1}{81}$. ………………………… (4 分)

$\therefore$ X 的分布列

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

…………(5 分)

$\therefore E(X)=0\times\frac{16}{81}+1\times\frac{32}{81}+2\times\frac{24}{81}+3\times\frac{8}{81}+4\times\frac{1}{81}=\frac{4}{3}$. ………………………… (6 分)

(由题意得 $X\sim B\left(4,\frac{1}{3}\right)$. 得 X 的分布列为 $P(X=k)=C_4^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{4-k}$，$k=0,1,2,3,4$.

分布列写成 $P(X=k)=C_4^k(\frac{1}{3})^k\cdot(\frac{2}{3})^{4-k}$，$k=0,1,2,3,4$. $E(X)=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ 也给 4 分)

(2)若甲队恰在第4轮取得胜利,则前3轮结束时比分可能为1:0,2:0,2:1,3:1,3:2.

分别记前3轮比分为1:0,2:0,2:1,3:1,3:2且甲队恰在第4轮取得胜利,事件分别为A,B,C,D,E. ······(7分)

$P(A)=C_3^1\times\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{768}$.

$P(B)=C_3^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{10}{768}$.

$P(C)=C_3^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}\times C_3^1\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{6}{256}=\frac{18}{768}$.

$P(D)=\left(\frac{3}{4}\right)^3\times C_3^1\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{20}{256}=\frac{60}{768}$.

$P(E)=\left(\frac{3}{4}\right)^3\times C_3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{12}{256}=\frac{36}{768}$. ······

······(10分)(对1个不给分,对2–3个给1分,全对给3分)

故P(甲队恰在第4轮取得胜利)$=\frac{1}{768}+\frac{10}{768}+\frac{18}{768}+\frac{60}{768}+\frac{36}{768}=\frac{125}{768}$. ······(11分)

$\therefore$ 甲队恰在第4轮取得胜利的概率为$\frac{125}{768}$. ······(12分)

21. **解**:(1)$\because$ 双曲线C的左焦点$F(-c,0)$到双曲线C的一条渐近线$bx+ay=0$的距离为

$d=\frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=b$,而$d=2$,$\therefore b=2$. ······(1分)

$\therefore$ 双曲线C的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1(0<a<10)$.

依题意直线l_1的方程为$y=\frac{1}{3}(x-a)$.

由$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1,\\ y=\frac{1}{3}(x-a),\end{cases}$ 消去y整理得:$(36-a^2)x^2+2a^3x-a^2(a^2+36)=0$, ······(2分)

依题意:$36-a^2\neq0$,$\Delta>0$,

则$x_Ax_B=\frac{a^2(a^2+36)}{a^2-36}$.

$\because x_A=a$,$\therefore x_B=\frac{a(a^2+36)}{a^2-36}$. ······(3分)

$\therefore |AB|=\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}|x_A-x_B|=\frac{\sqrt{10}}{3}|x_A-x_B|=\frac{8\sqrt{10}}{3}$,$\therefore |x_A-x_B|=8$.

即$\left|a-\frac{a(a^2+36)}{a^2-36}\right|=8$,解得$a=3$或$a=12$(舍去),

$\therefore$ 双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$. ……………………………………………………（5 分）

（2）依题意直线 l_2 的斜率不等于 0，设直线 l_2 的方程为 $x=my+6$.

由 $\begin{cases}x=my+6,\\ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 消去 x 整理得：$(4m^2-9)y^2+48my+108=0$，…………………………（6 分）

$\therefore 4m^2-9\neq0,\Delta>0$.

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\frac{-48m}{4m^2-9},y_1y_2=\frac{108}{4m^2-9}$. …………………………（7 分）

直线 AP 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1-3}(x-3)$，令 $x=6$ 得：$y=\frac{3y_1}{x_1-3}$，$\therefore M\left(6,\frac{3y_1}{x_1-3}\right)$.

同理可得 $N\left(6,\frac{3y_2}{x_2-3}\right)$. ……………………………………………………………（8 分）

由对称性可知，若以线段 MN 为直径的圆过定点，则该定点一定在 x 轴上，……（9 分）

设该定点为 $R(t,0)$，则 $\overrightarrow{RM}=\left(6-t,\frac{3y_1}{x_1-3}\right)$，$\overrightarrow{RN}=\left(6-t,\frac{3y_2}{x_2-3}\right)$，

$$\begin{aligned}\text{故 } \overrightarrow{RM}\cdot\overrightarrow{RN}&=(6-t)^2+\frac{9y_1y_2}{(x_1-3)(x_2-3)}\\&=(6-t)^2+\frac{9y_1y_2}{(my_1+3)(my_2+3)}\\&=(6-t)^2+\frac{9y_1y_2}{m^2y_1y_2+3m(y_1+y_2)+9}\\&=(6-t)^2+\frac{9\times\frac{108}{4m^2-9}}{m^2\times\frac{108}{4m^2-9}-\frac{3m\times48m}{4m^2-9}+9}\\&=(6-t)^2-12=0,\end{aligned}$$

解得 $t=6-2\sqrt{3}$ 或 $t=6+2\sqrt{3}$.

故以线段 MN 为直径的圆过定点 $(6-2\sqrt{3},0)$ 和 $(6+2\sqrt{3},0)$. ……………………（12 分）

22. 解：$g'(x)=1+\sin x$，对任意的 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$，$tf(x)-g'(x)\geq0$ 恒成立，

即 $te^x\cos x\geq1+\sin x$ 对任意的 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 恒成立. ……………………………………（1 分）

当 $x=-\frac{\pi}{2}$ 时，则有 $0\geq0$ 对任意的 $t\in\mathbf{R}$ 恒成立；……………………………………（2 分）

当 $-\frac{\pi}{2}<x\leq0$ 时，$\cos x>0$，则 $t\geq\frac{1+\sin x}{e^x\cos x}$，令 $h(x)=\frac{1+\sin x}{e^x\cos x}$，其中 $-\frac{\pi}{2}<x\leq0$，

$h'(x)=\dfrac{e^x\cos^2x-e^x(\cos x-\sin x)(1+\sin x)}{(e^x\cos x)^2}=\dfrac{(1-\cos x)(1+\sin x)}{e^x\cos^2x}\geqslant 0$ 且 $h'(x)$ 不恒为零,…… (4分)

故函数 $h(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ 上单调递增,则 $h(x)_{\max}=h(0)=1$,故 $t\geqslant 1$.

综上所述,$t\geqslant 1$. ………………………………………………………… (5分)

【小问2详解】

证明:由 $f(x)=g'(x)$ 可得 $e^x\cos x=1+\sin x$,

令 $\varphi(x)=e^x\cos x-\sin x-1$,则 $\varphi'(x)=e^x(\cos x-\sin x)-\cos x$. ……………………… (6分)

因为 $x\in\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{3},2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$,则 $\sin x>\cos x>0$,

所以,$\varphi'(x)<0$,所以,函数 $\varphi(x)$ 在 $\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{3},2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$ 上单调递减. …… (7分)

$$\text{因为 }\varphi\left(2n\pi+\frac{\pi}{3}\right)=e^{2n\pi+\frac{\pi}{3}}\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{3}\right)-1$$
$$=\frac{1}{2}e^{2n\pi+\frac{\pi}{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}-1$$
$$\geqslant\frac{e^{2\pi+\frac{\pi}{3}}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-1>0,$$

$\varphi\left(2n+\dfrac{\pi}{2}\right)=-2<0$,

所以,存在唯一的 $x_0\in\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{3},2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$,使得 $\varphi(x_0)=0$. ……………… (9分)

所以,$x_n\in\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{3},2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$,则 $x_{n+1}-2\pi\in\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{3},2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$,

$$\text{所以},\varphi(x_{n+1}-2\pi)=e^{x_{n+1}-2\pi}\cos(x_{n+1}-2\pi)-\sin(x_{n+1}-2\pi)-1$$
$$=e^{x_{n+1}-2\pi}\cos x_{n+1}-\sin x_{n+1}-1=e^{x_{n+1}-2\pi}\cos x_{n+1}-e^{x_{n+1}}\cos x_{n+1}$$
$$=(e^{x_{n+1}-2\pi}-e^{x_{n+1}})\cos x_{n+1}<0=\varphi(x_n),$$

因为函数 $\varphi(x)$ 在 $\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{3},2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$ 上单调递减, ……………………… (11分)

故 $x_{n+1}-2\pi>x_n$,即 $x_{n+1}-x_n>2\pi$. ……………………………………………… (12分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。