炎德·英才大联考长郡中学2021届模拟试卷(一)

数 学

座位号______

考生号______

姓名______

注意事项：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答第Ⅰ卷时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
3. 回答第Ⅱ卷时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若复数 z 满足 $2z+\bar{z}=3-2i$，其中 i 为虚数单位，则 $z=$

A. $1+2i$　　B. $1-2i$　　C. $-1+2i$　　D. $-1-2i$

2. 已知集合 $P=\{x|x^2-5x-6\leqslant 0\}$，$Q=\{x|3^x\geqslant 1\}$，则 $P\cap Q=$

A. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 0\}$　　B. $\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$　　C. $\{x|0\leqslant x\leqslant 6\}$　　D. $\{x|-6\leqslant x\leqslant 0\}$

3. 圆 $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ 的圆心到直线 $ax+y-1=0$ 的距离为1，则 $a=$

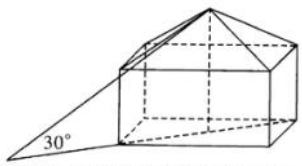
A. $-\frac{4}{3}$　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

4. 设 a、b 是实数，则“$a>b$”是“$a^2>b^2$”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 某班科技兴趣小组研究在学校的图书馆顶上安装太阳能板的发电量问题，要测量顶部的面积，将图书馆看成是一个长方体与一个等底的正四棱锥组合而成，经测量长方体的底面正方形的边长为26米，高为9米，当正四棱锥的顶点在阳光照射下的影子恰好落在底面正方形的对角线的延长线上时，测的光线与底面夹角为30°，正四棱锥顶点的影子到长方体下底面最近顶点的距离为11.8米，则图书馆顶部的面积大约为(　　)平方米(注：$\sqrt{2}\approx 1.4$，$\sqrt{3}\approx 1.7$，$\sqrt{233}\approx 15.2$)



A. 990　　B. 890　　C. 790　　D. 690

6. 已知非空集合 A，B 满足以下两个条件：(1) $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$，$A\cap B=\varnothing$；(2) A 的元素个数不是 A 中的元素，B 的元素个数不是 B 中的元素. 则有序集合对 (A,B) 的个数为

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 16

7. 已知实数 $a,b,c\in\mathbf{R}$ 满足 $\frac{\ln a}{e^a}=\frac{b}{e^b}=-\frac{c}{e^c}$，$b>1$，则 a,b,c 的大小关系为

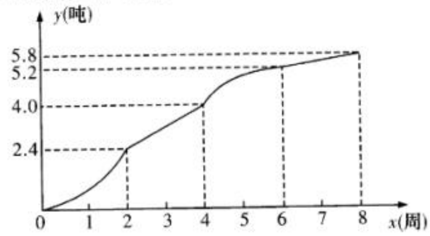
A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $b>c>a$　　D. $b>a>c$

8. 已知△ABC 中，$AB=2BC=4$，$AC=2\sqrt{3}$，点 M 在线段 AC 上除 A，C 的位置运动，现沿 BM 进行翻折，使得线段 AB 上存在一点 N，满足 $CN\perp$ 平面 ABM；若 $NB>\lambda$ 恒成立，则实数 λ 的最大值为

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9. 为了了解市民对各种垃圾进行分类的情况，加强垃圾分类宣传的针对性，指导市民尽快掌握垃圾分类的方法，某市垃圾处理厂连续 8 周对有害垃圾错误分类情况进行了调查. 经整理绘制了如图所示的有害垃圾错误分类重量累积统计图，图中横轴表示时间（单位：周），纵轴表示有害垃圾错误分类的累积重量（单位：吨）. 根据统计图分析，下列结论正确的是



A. 当 $x\in[0,2)$ 时有害垃圾错误分类的重量加速增长

B. 当 $x\in[2,4)$ 时有害垃圾错误分类的重量匀速增长

C. 当 $x\in[4,6)$ 时有害垃圾错误分类的重量相对于当 $x\in[2,4)$ 时增长了 30%

D. 当 $x\in[6,8]$ 时有害垃圾错误分类的重量相对于当 $x\in[0,2)$ 时减少了 0.6 吨

10. 如果平面向量 $\boldsymbol{a}=(2,-4)$，$\boldsymbol{b}=(-6,12)$，那么下列结论中正确的是

A. $|\boldsymbol{b}|=3|\boldsymbol{a}|$　　B. $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$

C. $\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为 30°　　D. $\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$方向上的投影为 $2\sqrt{5}$

11. 如图，某校测绘兴趣小组为测量河对岸直塔 AB（A 为塔顶，B 为塔底）的高度，选取与 B 在同一水平面内的两点 C 与 D（B,C,D 不在同一直线上），测得 $CD=s$. 测绘兴趣小组利用测角仪可测得的角有：$\angle ACB$，$\angle ACD$，$\angle BCD$，$\angle ADB$，$\angle ADC$，$\angle BDC$，则根据下列各组中的测量数据可计算出塔 AB 的高度的是

A. s，$\angle ACB$，$\angle BCD$，$\angle BDC$

B. s，$\angle ACB$，$\angle BCD$，$\angle ACD$

C. s，$\angle ACB$，$\angle ACD$，$\angle ADC$

D. s，$\angle ACB$，$\angle BCD$，$\angle ADC$

12. 数学中的很多符号具有简洁、对称的美感，是形成一些常见的漂亮图案的基石，也是许多艺术家设计作品的主要几何元素. 如我们熟悉的∞符号，我们把形状类似∞的曲线称为“∞曲线”. 在平面直角坐标系 xOy 中，把到定点 $F_1(-a,0)$，$F_2(a,0)$ 距离之积等于 a^2 $(a>0)$ 的点的轨迹称为“∞曲线”C. 已知点 $P(x_0,y_0)$ 是“∞曲线”C 上一点，下列说法中正确的有

A. “∞曲线”C 关于原点 O 中心对称；

B. $-\frac{a}{2}\leqslant y_0\leqslant\frac{a}{2}$；

C. “∞曲线”C 上满足 $|PF_1|=|PF_2|$ 的点 P 有两个；

D. $|PO|$ 的最大值为 $\sqrt{2}a$.

第Ⅱ卷

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中对应题号后的横线上）

13. 在$\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$的展开式中，常数项等于________.

14. 已知$x=\frac{\pi}{4}$是函数$f(x)=a\sin x+b\cos x(a>0)$的对称轴，则$f(x)$的对称中心为________.

15. 定义函数$f(x)=[x[x]]$，其中$[x]$表示不超过x的最大整数，例如：$[1.3]=1$，$[-1.5]=-2$，$[2]=2$. 当$x\in[0,n)(n\in\mathbf{N}^*)$时，$f(x)$的值域为$A_n$. 记集合$A_n$中元素的个数为$a_n$，则$\sum\limits_{i=2}^{2020}\frac{1}{a_i-1}$的值为________.

16. 若关于x的方程$\frac{ax}{e^{x-1}}+x-\ln(ax)-2=0(a>0)$有解，则正数$a$的取值范围是________.

四、解答题（共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17. (10 分) $\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知向量$\boldsymbol{m}=(c-a,\sin B)$，$\boldsymbol{n}=(b-a,\sin A+\sin C)$，满足$\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$.

(1)求C;

(2)若$\sqrt{6}c+3b=3a$，求$\sin A$.

18. (12 分)已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$a_3=8$，$S_5=2a_7$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若数列$\{b_n\}$满足$b_n=a_n\cos n\pi+2^{n+1}$，求数列$\{b_n\}$的前$2n$项和T_{2n}.

19. (12 分)如图 1，在等边$\triangle ABC$中，点D、E分别为边AB、AC上的动点且满足$DE\parallel BC$，记$\frac{DE}{BC}=\lambda$. 将$\triangle ADE$沿DE翻折到$\triangle MDE$的位置并使得平面$MDE\perp$平面$DECB$，连接MB，MC得到图 2，点N为MC的中点.

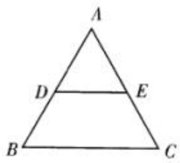


图1

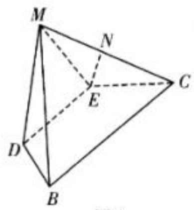


图2

(1)当$EN\parallel$平面MBD时，求λ的值;

(2)试探究：随着 λ 值的变化，二面角 $B-MD-E$ 的大小是否改变？如果是，请说明理由；如果不是，请求出二面角 $B-MD-E$ 的正弦值大小.

20.(12 分)已知函数 $f(x)=\ln x-a\left(1-\frac{1}{x}\right)+1(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $f(x)>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，求整数 a 的最大值.

21.(12 分)已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上顶点到右顶点的距离为 $\sqrt{7}$，离心率为 $\frac{1}{2}$，过椭圆 C 的左焦点 F_1 作不与 x 轴重合的直线 MN 与椭圆 C 相交于 M,N 两点，过点 M 作直线 $m:x=-2a$ 的垂线 ME，E 为垂足.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)①已知直线 EN 过定点 P，求定点 P 的坐标；②点 O 为坐标原点，求 $\triangle OEN$ 面积的最大值.

22.(12 分)某电子公司新开发一电子产品，该电子产品的一个系统 G 有 $2n-1$ 个电子元件组成，各个电子元件能正常工作的概率均为 p，且每个电子元件能否正常工作相互独立. 若系统中有超过一半的电子元件正常工作，则系统 G 可以正常工作，否则就需维修.

(1)当 $n=2,p=\frac{1}{2}$ 时，若该电子产品由 3 个系统 G 组成，每个系统的维修所需费用为 500 元，设 ξ 为该电子产品需要维修的系统所需的总费用，求 ξ 的分布列与数学期望；

(2)为提高系统 G 正常工作的概率，在系统内增加两个功能完全一样的电子元件，每个新元件正常工作的概率均为 p，且新增元件后有超过一半的电子元件正常工作，则系统 G 可以正常工作，问 p 满足什么条件时，可以提高整个系统 G 的正常工作概率？

炎德·英才大联考长郡中学2021届模拟试卷(一)

数学参考答案

一、二、选择题

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答　案	B	C	A	D	C	C	D	A	AB	AB	ACD	ABD

5. C 【解析】如图1，根据题意得：$\angle PSO=30^\circ$，$CC_1=9$，$SC_1=11.8$，$AB=26$，

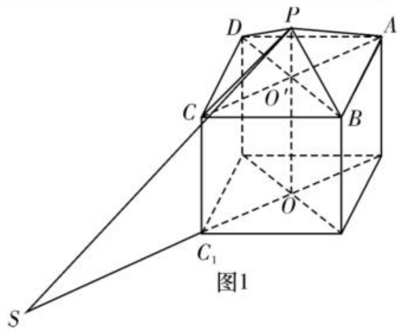


图1

所以 $C_1O=13\sqrt{2}\approx18.2$，故 $SO=SC_1+C_1O=11.8+18.2=30$，

故在 Rt$\triangle PSO$ 中，设 $PO=x$，则 $PS=2x$，$SO=30$，

所以 $|SO|^2+|OP|^2=|SP|^2$，

即：$900+x^2=4x^2$，解得 $x=10\sqrt{3}\approx17$.

在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PO'=17-9=8$，$AB=26$，

取 BC 中点 E，连接 EP，EO'，所以 $EO'=13$，

由正四棱锥的性质得$\triangle PEO'$为直角三角形，

故 $|PE|^2=|PO'|^2+|O'E|^2=13^2+8^2=233$，

所以 $|PE|=\sqrt{233}\approx15.2$，

所以正四棱锥 $P-ABCD$ 的侧面积为 $S=4\times S_{\triangle PBC}=4\times\frac{1}{2}\times15.2\times26=790.4\approx790$.

故选 C.

6. C 【解析】$N=(1+3)\times2=8$，故选 C.

7. D 【解析】首先 $c<0$，$b>1$，$a>1$，

$\because \frac{b}{e^b}=\frac{\ln a}{e^a}<\frac{a}{e^a}$，又 $y=\frac{x}{e^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 单减，

故 $b>a$，故选 D.

8. A 【解析】易知要满足 $CN\perp$ 平面 ABM 有两个极限状态，第一是 BM 为$\angle ABC$ 的角平分线时，此时 $NB=2$，第二是点 M 与点 A 重合时，此时 $NB=1$；故 $NB\in(1,2)$，

则实数 λ 的最大值为 1，

故选 A.

9. AB 【解析】本题考查统计图的应用. 由统计图可知，第 2 周增长数量比第 1 周增长数量明显要多，所以是加速增长，所以选项 A 正确；

当 $x\in[2,4)$ 时图象是线段，所以是匀速增长，所以选项 B 正确；

当 $x\in[4,6)$ 时增长数量比当 $x\in[2,4)$ 时增长数量要少，所以是减少，所以选项 C 错误；

当 $x\in[0,2)$ 时共增长 2.4 吨，当 $x\in[6,8]$ 时共增长 0.6 吨，所以减少了 1.8 吨，所以选项 D 错误.

故选 AB.

10. AB 【解析】因为 $\boldsymbol{a}=(2,-4)$，$\boldsymbol{b}=(-6,12)$，所以 $\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{a}$.

在 A 中，由 $\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{a}$，可得 $|\boldsymbol{b}|=3|\boldsymbol{a}|$，故 A 正确；

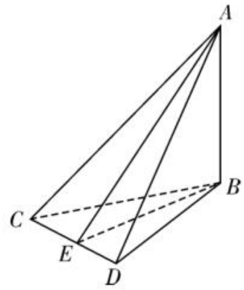
在 B 中，由 $\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{a}$，可得 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，故 B 正确；

在 C 中，由 $\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{a}$，可得$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为 180°，故 C 错误；

在 D 中，$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$方向上的投影为$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{(2,-4)\cdot(-6,12)}{\sqrt{(-6)^2+12^2}}=-2\sqrt{5}$，故 D 错误.

故选 AB.

11. ACD 【解析】解一个三角形,需要知道三个条件,且至少一个为边长. A. 在$\triangle CBD$中,已知s,$\angle BCD$,$\angle BDC$,可以解这个三角形得到BC,再利用$\angle ACB$、BC解直角$\triangle ABC$得到AB的值;B. 在$\triangle CBD$中,已知s,$\angle BCD$,无法解出此三角形,在$\triangle CAD$中,已知s,$\angle ACD$,无法解出此三角形,也无法通过其它三角形求出它的其它几何元素,所以它不能计算出塔AB的高度;C. 在$\triangle ACD$中,已知s,$\angle ACD$,$\angle ADC$,可以解$\triangle ACD$得到AC,再利用$\angle ACB$、AC解直角$\triangle ABC$得到AB的值;D. 如图,过点B作$BE\perp CD$,连接AE. 由于$\cos\angle ACB=\frac{CB}{AC}$,$\cos\angle BCD=\frac{CE}{BC}$,$\cos\angle ACE=\frac{CE}{AC}$,所以$\cos\angle ACE=\cos\angle ACB\cdot\cos\angle BCD$,所以可以求出$\angle ACD$的大小,在$\triangle ACD$中,已知$\angle ACD$,$\angle ADC$,$s$可以求出$AC$,再利用$\angle ACB$,$AC$解直角$\triangle ABC$得到$AB$的值. 故选 ACD.



12. ABD 【解析】对 A,设动点$C(x,y)$,由题意可得C的轨迹方程为$\sqrt{(x-a)^2+y^2}\sqrt{(x+a)^2+y^2}=a^2$,把$(x,y)$关于原点对称的点$(-x,-y)$代入轨迹方程,显然成立;

对 B,因为$P(x_0,y_0)$,故$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\sin\angle F_1PF_2=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_0|$.

又$|PF_1|\cdot|PF_2|=a^2$,所以$a^2\sin\angle F_1PF_2=2a\cdot|y_0|$,

即$|y_0|=\frac{a}{2}\sin\angle F_1PF_2\leqslant\frac{a}{2}$,故$-\frac{a}{2}\leqslant y_0\leqslant\frac{a}{2}$. 故 B 正确;

对 C,若$|PF_1|=|PF_2|$,则$P(x_0,y_0)$在F_1F_2的中垂线即y轴上.

故此时$x_0=0$,代入$\sqrt{(x-a)^2+y^2}\sqrt{(x+a)^2+y^2}=a^2$,

可得$y_0=0$,即$P(0,0)$,仅有一个,故 C 错误;

对 D,因为$\angle POF_1+\angle POF_2=\pi$,

故$\cos\angle POF_1+\cos\angle POF_2=0$,

$\frac{|OP|^2+|OF_1|^2-|PF_1|^2}{2|OP|\cdot|OF_1|}+\frac{|OP|^2+|OF_2|^2-|PF_2|^2}{2|OP|\cdot|OF_2|}=0$,

因为$|OF_1|=|OF_2|=a$,$|PF_1|\cdot|PF_2|=a^2$,

故$2|OP|^2+2a^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2$.

即$2|OP|^2+2a^2=(|PF_1|-|PF_2|)^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|$,

所以$2|OP|^2=(|PF_1|-|PF_2|)^2$.

又$||PF_1|-|PF_2||\leqslant|F_1F_2|=2a$,当且仅当$P$,$F_1$,$F_2$共线时取等号.

故$2|OP|^2=(|PF_1|-|PF_2|)^2\leqslant(2a)^2$,

即$|OP|^2\leqslant2a^2$,解得$|OP|\leqslant\sqrt{2}a$,故 D 正确.

故选 ABD.

三、填空题

13. 160

14. $\left(k\pi-\frac{\pi}{4},0\right)(k\in\mathbf{Z})$

15. $\frac{2019}{1010}$ 【解析】$\because[x]$表示不超过x的最大整数,

$\therefore$当$x\in[0,n)(n\in\mathbf{N}^*)$时,$[x]=\begin{cases}0,x\in[0,1)\\1,x\in[1,2)\\\cdots\\n-1,x\in[n-1,n)\end{cases}$,$\therefore x[x]=\begin{cases}0,x\in[0,1)\\x,x\in[1,2)\\\cdots\\(n-1)x,x\in[n-1,n)\end{cases}$,

$\therefore[x[x]]$在各区间内的元素个数为$1,1,2,3,\cdots,n-1$,

$\therefore a_n=1+1+2+3+\cdots+(n-1)=1+\frac{(1+n-1)(n-1)}{2}=1+\frac{n(n-1)}{2}$,

$\therefore\frac{1}{a_n-1}=\frac{2}{n(n-1)}=2\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$,

$\therefore\sum\limits_{i=2}^{2020}\frac{1}{a_i-1}=2\sum\limits_{i=2}^{2020}\left(\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i}\right)=2\left(1-\frac{1}{2020}\right)=\frac{2019}{1010}$.

16. $[1,+\infty)$ 【解析】因为$\dfrac{e^{\ln(ax)}}{e^{x-1}}-[\ln(ax)-x+1]-1=0$，即 $e^{[\ln(ax)-x+1]}=[\ln(ax)-x+1]+1$ 有解，

由 $e^x\geqslant x+1$，当且仅当 $x=0$ 时，可知，$\ln(ax)-x+1=0$ 在区间$(0,+\infty)$内有解，

所以 $ax=e^{x-1}$ 在区间$(0,+\infty)$内有解，即 $a=\dfrac{e^{x-1}}{x}$ 在区间$(0,+\infty)$内有解，所以 $a\geqslant 1$.

四、解答题

17.【解析】(1)因为 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，所以$(c-a)(\sin A+\sin C)=(b-a)\sin B$，由正弦定理得$(c-a)(a+c)=(b-a)b$，所以 $a^2+b^2-c^2=ab$，

所以 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{ab}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，

因为 $C\in(0,\pi)$，故 $C=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)知 $B=\dfrac{2\pi}{3}-A$，由题设及正弦定理得$\sqrt{6}\sin C+3\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)=3\sin A$，

即$\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\dfrac{1}{2}\sin A=\sin A$，可得 $\sin\left(A-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

由于 $0<A<\dfrac{2\pi}{3}$，$-\dfrac{\pi}{3}<A-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\cos\left(A-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

故 $\sin A=\sin\left(A-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(A-\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\left(A-\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. …
……………………………………………………………………………………………… 10 分

18.【解析】(1)设$\{a_n\}$公差为 d，依题意得

$$\begin{cases}5a_1\times\dfrac{5\times4}{2}d=2(a_1+6d)\\ a_1+2d=8\end{cases}$$

解得$\begin{cases}a_1=2.\\ d=3\end{cases}$

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2+3(n-1)=3n-1$. ……………………………………………………… 6 分

(2)$b_n=a_n\cos n\pi+2^{n+1}=(-1)^n a_n+2^{n+1}$，

$T_{2n}=(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{2n}-a_{2n-1})+(2^2+2^3+\cdots+2^{2n+1})$

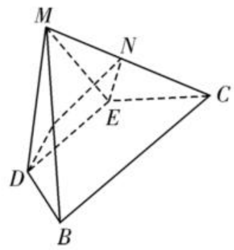
$=3\times n+\dfrac{2^2(1-2^{2n})}{1-2}=3n+2^{2n+2}-4$. ……………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)证明：取 MB 的中点为 P，连接 DP,PN，因为 $MN=CN,MP=BP$，所以 $NP/\!/BC$，

又 $DE/\!/BC$，所以 $NP/\!/DE$，即 N,E,D,P 四点共面，又 $EN/\!/$面 BMD，$EN\subset$面 $NEDP$，

平面 $NEDP\cap$平面 $MBD=DP$，所以 $EN/\!/PD$，即 $NEDP$ 为平行四边形，

所以 $NP/\!/DE$，且 $NP=DE$，即 $DE=\dfrac{1}{2}BC$，即 $\lambda=\dfrac{1}{2}$. ……………………………… 6 分



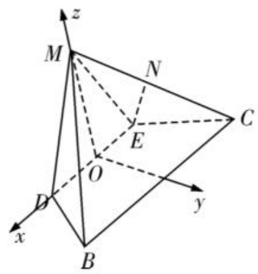
(2)取 DE 的中点 O，由平面 $MDE\perp$平面 $DECB$，且 $MO\perp DE$，所以 $MO\perp$平面 $DECB$，

如图建立空间直角坐标系，不妨设 $BC=2$，则 $M(0,0,\sqrt{3}\lambda)$，$D(\lambda,0,0)$，

$B(1,\sqrt{3}(1-\lambda),0)$，所以$\overrightarrow{MD}=(\lambda,0,-\sqrt{3}\lambda)$，$\overrightarrow{DB}=(1-\lambda,\sqrt{3}(1-\lambda),0)$.

设平面 BMD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{MD}\cdot\boldsymbol{m}=\lambda x-\sqrt{3}\lambda z=0\\ \overrightarrow{DB}\cdot\boldsymbol{m}=(1-\lambda)x+\sqrt{3}(1-\lambda)y=0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}x=\sqrt{3}z,\\x=-\sqrt{3}y\end{cases}$，令 $x=\sqrt{3}$，即 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-1,1)$，又平面 EMD 的法向量 $\boldsymbol{n}=(0,1,0)$，



所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，即随着 λ 值的变化，二面角 $B-MD-E$ 的大小不变. ………………………… 11 分

且 $\sin\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\sqrt{1-\cos^2\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以二面角 $B-MD-E$ 的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. ………………………… 12 分

20.【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

(1)因为 $f(x)=\ln x-a\left(1-\dfrac{1}{x}\right)+1$，所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{x-a}{x^2}$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立；

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$ 得 $x>a$，$f'(x)<0$ 得 $0<x<a$.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增；………………………… 5 分

(2)由 $f(x)>0$ 得 $\ln x-a\left(1-\dfrac{1}{x}\right)+1>0$，所以 $\dfrac{a(x-1)}{x}<\ln x+1$，

即 $a<\dfrac{x\ln x+x}{x-1}$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立.

令 $g(x)=\dfrac{x\ln x+x}{x-1}$，则 $g'(x)=\dfrac{(\ln x+2)(x-1)-(x\ln x+x)}{(x-1)^2}=\dfrac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$，

令 $h(x)=x-\ln x-2$，则 $h'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，因为 $x>1$，所以 $h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $h(3)=1-\ln 3<0$，$h(4)=2-\ln 4>0$，

所以存在 $x_0\in(3,4)$ 满足 $x_0-\ln x_0-2=0$. ………………………… 8 分

当 $1<x<x_0$ 时，$h(x)<0$，$g'(x)<0$；当 $x>x_0$ 时，$h(x)>0$，$g'(x)>0$.

所以 $g(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(x_0)=\dfrac{x_0(x_0-2)+x_0}{x_0-1}=x_0$，所以 $a<x_0$，

因为 $3<x_0<4$，$a\in\mathbf{Z}$，所以 a 的最大值为 3. ………………………… 12 分

21.【解析】(1)由题意得：$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{7}\\e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}\\a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得：$a=2$，$b=\sqrt{3}$，$c=1$.

故椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………………………… 4 分

(2)①由(1)知：$F_1(-1,0)$，

设直线 MN 方程：$x=my-1$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$E(-4,y_1)$，

联立方程 $\begin{cases}x=my-1\\\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得：$(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$，$\therefore -2my_1y_2=3(y_1+y_2)$，

又 $k_{EN}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2+4}$，$\therefore$ 直线 EN 方程为：$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2+4}(x+4)$.

令 $y=0$，则 $x=-4-\dfrac{y_1(x_2+4)}{y_2-y_1}=-4-\dfrac{my_1y_2+3y_1}{y_2-y_1}=-4-\dfrac{\frac{3}{2}(y_1-y_2)}{y_2-y_1}=-4+\dfrac{3}{2}=-\dfrac{5}{2}$，

$\therefore$直线 EN 过定点 $P\left(-\frac{5}{2},0\right)$. ………………………………………… 8 分

②由①中 $\Delta=144(m^2+1)>0$ 知：$m\in\mathbf{R}$，

又 $|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$，

$\therefore S_{\triangle OEN}=\frac{1}{2}|OP|\cdot|y_1-y_2|=\frac{5}{4}\cdot\frac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}=\frac{15\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$，

令 $t=\sqrt{m^2+1}$，$t\geqslant1$，则 $S_{\triangle OEN}=\frac{15t}{3t^2+1}=\frac{15}{3t+\frac{1}{t}}$

令 $f(t)=\frac{15}{3t+\frac{1}{t}}(t\geqslant1)$，

$\because f(t)$在$[1,+\infty)$单调递减，$\therefore$当 $t=1$ 时，$f(t)_{\max}=f(1)=\frac{15}{4}$，

即$\triangle OEN$ 面积的最大值为$\frac{15}{4}$. ………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)当 $n=2$ 时，一个系统有 3 个电子元件，则一个系统需要维修的概率为 $C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}$.
………………………………………… 2 分

设 X 为该电子产品需要维修的系统个数，则 $X\sim B\left(3,\frac{1}{2}\right)$，$\xi=500X$，

$\therefore P(\xi=500X)=P(X=k)=C_3^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3-k}$，$k=0,1,2$，

$\therefore\xi$的分布列为：

ξ	0	500	1000	1500
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$\therefore E(\xi)=500\times3\times\frac{1}{2}=750$. ………………………………………… 5 分

(2)当 $1>p>\frac{1}{2}$ 时，增加两个元件后，能提高系统的可靠性. ………………………… 6 分

记 $2k-1$ 个元件组成的系统正常工作的概率为 p_k.

$2k-1$ 个元件中有 i 个正常工作的概率为 $C_{2k-1}^i p^i(1-p)^{2k-1-i}$，

因此系统工常工作的概率 $p_k=\sum\limits_{i=k}^{2k-1}C_{2k-1}^i p^i(1-p)^{2k-1-i}$. ………………………… 9 分

在 $2k-1$ 个元件组成的系统中增加两个元件得到 $2k+1$ 个元件组成的系统，则新系统正常工作可分为下列情形：

(a)原系统中至少 $k+1$ 个元件正常工作，概率为 $p_k-C_{2k-1}^k p^k(1-p)^{k-1}$；

(b)原系统中恰有 k 个元件正常工作，且新增的两个元件至少有 1 个正常工作，

概率为$[1-(1-p)^2]C_{2k-1}^k p^k(1-p)^{k-1}$；

(c)原系统中恰有 $k-1$ 个元件正常工作，且新增的两个元件均正常工作，

概率为 $p^2C_{2k-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^k$.

所以 $p_{k+1}=p^2C_{2k-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^k+[1-(1-p)^2]C_{2k-1}^k p^k(1-p)^{k-1}+p_k-C_{2k-1}^k p^k(1-p)^{k-1}$，

因此，

$p_{k+1}-p_k=p^2C_{2k-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^k+[1-(1-p)^2]C_{2k-1}^k p^k(1-p)^{k-1}-C_{2k-1}^k p^k(1-p)^{k-1}$

$=p^k(1-p)^kC_{2k-1}^{k-1}(2p-1)$，

故当 $1>p>\frac{1}{2}$ 时，p_k 单调增加，增加两个元件后，能提高系统的可靠性. ………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》