

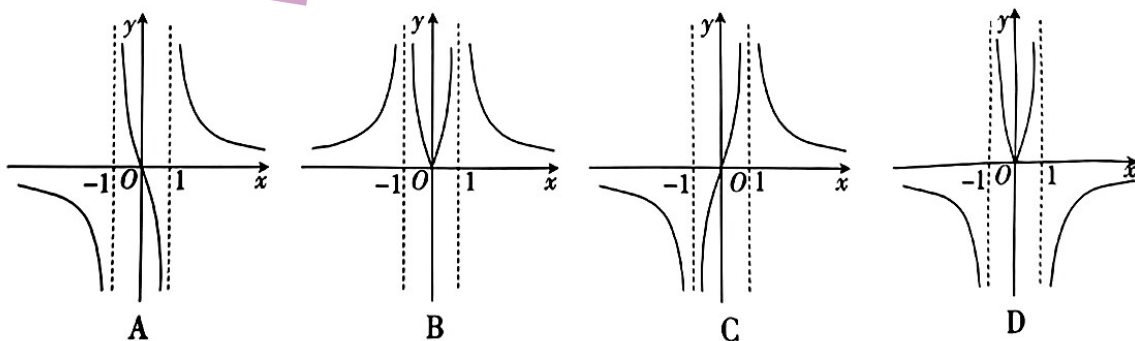
高三数学考试

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 则 $A \cap B =$
 - A. $\{0, 1\}$
 - B. $\{-1, 0\}$
 - C. $\{-2, -1, 0\}$
 - D. $\{0, 1, 2\}$
2. 命题“对于任意正数 x , 都有 $x+1 > 0$ ”的否定是
 - A. 对于任意正数 x , 都有 $x+1 < 0$
 - B. 对于任意正数 x , 都有 $x+1 \leq 0$
 - C. 存在正数 x , 使得 $x+1 \leq 0$
 - D. 存在非正数 x , 使得 $x+1 \leq 0$
3. 高斯函数 $f(x) = [x]$ 也叫取整函数, 其符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[3.14] = 3$, $[-1.6] = -2$. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $[a] = [b]$ ”是“ $|a-b| < 1$ ”的
 - A. 充分不必要条件
 - B. 必要不充分条件
 - C. 充要条件
 - D. 既不充分也不必要条件
4. 已知一扇形的圆心角为 40° , 半径为 9, 则该扇形的面积为
 - A. 9π
 - B. 12π
 - C. 18π
 - D. 36π
5. 函数 $f(x) = \frac{x^2}{3-3^{|x|}}$ 的图象大致为



6. 已知 α 是第四象限角, 且 $2\tan^2\alpha - \tan\alpha - 1 = 0$, 则 $\frac{\cos(2\pi - \alpha) - \sin(\pi - \alpha)}{3\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) + \cos(-\alpha)} =$
 - A. $-\frac{1}{3}$
 - B. $\frac{1}{3}$
 - C. $-\frac{3}{5}$
 - D. $\frac{3}{5}$

7. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = \frac{3}{f(x)}$, 且 $f(2) = -1$, 则 $f(100) =$

- A. -1 B. 1 C. -3 D. 3

8. 若函数 $f(x) = \cos(\omega x + \frac{\pi}{5})$ ($\omega > 0$) 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 上恰有两个零点, 则 ω 的取值范围是

- A. $(\frac{23}{15}, \frac{11}{5}]$ B. $[\frac{23}{15}, \frac{11}{5})$
 C. $(\frac{23}{15}, \frac{11}{5}] \cup [\frac{13}{5}, \frac{43}{15}]$ D. $[\frac{23}{15}, \frac{11}{5}) \cup [\frac{13}{5}, \frac{43}{15})$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x)$ 的定义域和值域均为 $[-3, 3]$, 则

- A. 函数 $f(x-2)$ 的定义域为 $[-1, 5]$
 B. 函数 $\frac{f(3x)}{x-1}$ 的定义域为 $[-1, 1)$
 C. 函数 $f(x-2)$ 的值域为 $[-3, 3]$
 D. 函数 $f(2x)$ 的值域为 $[-6, 6]$

10. 已知 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 角 α 的顶点与原点重合, 始边与 x 轴的正半轴重合, 若 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{10}$, 则下列点在角 α 的终边上的是

- A. $(-3, 4)$ B. $(-4, 3)$
 C. $(-6, 8)$ D. $(-8, 6)$

11. 已知 $a = \log_5 3, b = \log_{12} 5, c = \frac{2}{3}, d = \log_{0.5} 3$, 则下列判断正确的是

- A. $b < c < a$ B. $c < d < a$
 C. $a + d < 0$ D. $ad < a + d$

12. 关于 x 的不等式 $2x^2 - 3x - x \ln x + 1 \geq ax + b + (x-2)^2 \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 则

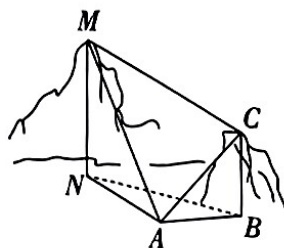
- A. $a = 1$ B. $a = 2$
 C. $b = -3$ D. $b = -2$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知关于 x 的不等式 $kx^2 - 3kx + k + 5 > 0$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则 k 的取值范围为 .

14. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数, 且对任意的 x, y , 都有 $f(xy) = f(x)f(y)$, 若 $f(-1) = 1$, 则 $f(x) < 1$ 的解集为 .

15. 如图, 为测量山高 MN , 选择 A 和另一座山的山顶 C 为测量观测点, 从 A 点测得 C 点的仰角 $\angle CAB = 45^\circ$, 从 A 点测得 M 点的仰角 $\angle MAN = 45^\circ$, 从 C 点测得 M 点的仰角为 α . 已知山高 $BC = 3$ (百米), $\tan \alpha = \frac{2}{7}$, $\angle NAB = 120^\circ$, 则山高 $MN =$ (百米).



16. 已知 $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$, $2\sin(\alpha + \beta) + \alpha^2 - 2\alpha + 3 = 0$, 则 $\beta =$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=3, a_2=8$ ，且 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 为等差数列。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 记 S_n 为数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和，证明： $S_n < \frac{3}{4}$ 。

18. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 对应的边分别是 a, b, c ，且 $b\cos C + c\cos B = 3a\cos A$ 。

(1) 求 $\cos A$ ；

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积是 $\sqrt{2}$ ， $a=2$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长。

19. (12 分)

某批发市场供应的排球中，来自甲厂的占 40%，来自乙厂的占 30%，来自丙厂的占 30%，甲厂生产的排球的合格率为 95%，乙厂生产的排球的合格率为 92%，丙厂生产的排球的合格率为 96%。

(1) 若小张到该市场购买 1 个排球，求购得的排球为合格品的概率。

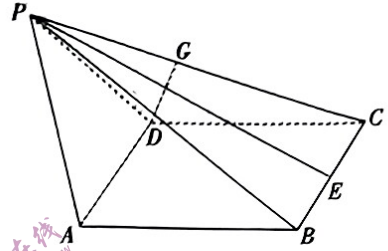
(2) 若小李到该市场批发 2 个排球回去销售，购买的 1 个球来自甲厂，1 个球来自丙厂，已知来自甲厂的每个排球售出后可获得纯利润 10 元，没有售出则每个球将损失 5 元，且每个球被售出的概率等于排球的合格率；来自丙厂的每个排球售出后可获得纯利润 8 元，没有售出则每个球将损失 6 元，且每个球被售出的概率等于排球的合格率。求小李到该市场批发 2 个排球进行销售获得的纯利润的数学期望。

20. (12分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是正方形, $AB=2$, $PA=PD=\sqrt{5}$, E 为 BC 的中点.

(1)证明: $AD \perp PE$.

(2)若二面角 $P-AD-B$ 的平面角为 $\frac{2\pi}{3}$, G 是线段 PC 上的一个动点,求直线 DG 与平面 PAB 所成角的最大值.



21. (12分)

在直角坐标系 xOy 中,动点 P 到直线 $x=4$ 的距离是它到点 $M(1,0)$ 的距离的 2 倍,设动点 P 的轨迹为曲线 C .

(1)求曲线 C 的方程;

(2)直线 $l: x=my-1$ 与曲线 C 交于 A, B 两点,求 $\triangle MAB$ 面积的最大值.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = x(\ln x + a)$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间;

(2)证明:当 $a \geq 1$ 时, $f(x) < ae^x - 1$.