# 新高中创新联盟TOP二十名校高一年级9月调研考试·数学

## 参考答案、提示及评分细则

1. C 集合$A=\{x|\sqrt{x+1}<2\}=\{x|-1\leqslant x<3\}$，$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x\leqslant 1$或$x\geqslant 3\}$，所以$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$. 故选C.

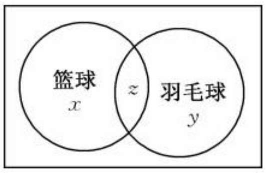
2. B 由题意，可得$\neg p$为$\forall a>0$，方程$x^2+ax=0$无实根. 故选B.

3. C 对于A，若$c=0$，则$ac=bc$，故A错误；
对于B，若$a=1,b=-2$，则$|a|<|b|$，故B错误；
对于C，若$a<b<0,a<0$，可得$a^2>ab$，故C正确；
对于D，若$a=3,b=2,c=-1$，则$\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$，$\frac{a+c}{b+c}=\frac{2}{1}=2$，$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$，故D错误. 故选C.

4. D 因为$a^2>1\Leftrightarrow a<-1$或$a>1$，$\frac{1}{a}>0\Leftrightarrow a>0$，又$a<-1$时，不能得出$a>0$；$a>0$时，不能得出$a<-1$，所以“$a^2>1$”是“$\frac{1}{a}>0$”的既不充分也不必要条件. 故选D.

5. A 因为$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5,x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,x>2\text{或}x<-\frac{3}{2},x\in\mathbf{Z}\right\}$，所以$A\cap B=\left\{x|-2\leqslant x<-\frac{3}{2}\text{或}2<x\leqslant 5,x\in\mathbf{Z}\right\}=\{-2,3,4,5\}$，它有$2^4=16$个子集. 故选A.

6. C 设只喜欢篮球的百分比为$x\%$，只喜欢羽毛球的百分比为$y\%$，两个项目都喜欢的百分比为$z$，由题意，可得$x+z=60,x+y+z=95,y+z=82$，解得$z=47$. 所以该中学既喜欢篮球又喜欢羽毛球的学生数占该校学生总数的比例是47%. 故选C.




7. B 不等式可化为$|x|^2+|x|-6<0$，即$-3<|x|<2$，解得$-2<x<2$. 故选B.

8. C 因为正数$x,y$满足$xy-2x-y=0$，所以$y=\frac{2x}{x-1}>0$，则$x-1>0$，所以$x+\frac{y}{2}=x+\frac{1}{x-1}+1=x-1+\frac{1}{x-1}+2\geqslant 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}+2=4$，当且仅当$x-1=\frac{1}{x-1}$，即$x=2$时，等号成立. 故选C.

9. AD 由图可知，$M\cup(\complement_{\mathbf{R}}N)=\mathbf{R}$，A正确；$M\cap(\complement_{\mathbf{R}}N)=\complement_{M}N\neq\varnothing$，B错误；$(\complement_{\mathbf{R}}M)\cup(\complement_{\mathbf{R}}N)=\complement_{\mathbf{R}}(M\cap N)=\complement_{\mathbf{R}}N$，C错误；$(\complement_{\mathbf{R}}M)\cap(\complement_{\mathbf{R}}N)=\complement_{\mathbf{R}}(M\cup N)=\complement_{\mathbf{R}}M$，D正确. 故选AD.

10. BCD 由题意得$a<0$，对称轴$x=-\frac{b}{2a}=1$，则$b=-2a>0$，当$x=1$时，$y=a+b+c>0$，故A错误；当$x=-1$时，$y=a-b+c<0$，则$a+c<b$，故B正确；当$x=0$时，$y=c>0$，则$abc<0$，故C正确；设一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的两根分别为$x_1,x_2$，由图象可知$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}<4$，整理可得$b^2<4a(c+4a)$，故D正确. 故选BCD.

11. AD 由$a>0,b>0,a+2b=2ab$，得$\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}=1$.
对于A，$a+2b=(a+2b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}\right)=2+\frac{a}{2b}+\frac{2b}{a}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{a}{2b}\cdot\frac{2b}{a}}=4$$\left(\text{当且仅当}\frac{a}{2b}=\frac{2b}{a}\text{，即}a=2,b=1\text{时取等号}\right)$，A正确；

对于 B，$a+b=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}\right)=\frac{3}{2}+\frac{a}{2b}+\frac{b}{a}\geqslant\frac{3}{2}+2\sqrt{\frac{a}{2b}\cdot\frac{b}{a}}=\frac{3}{2}+\sqrt{2}\left(\text{当且仅当}\frac{a}{2b}=\frac{b}{a}\text{，即 }a=\frac{2+\sqrt{2}}{2},b=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$，B 错误；

对于 C，∵$a+2b\geqslant2\sqrt{2ab}$（当且仅当 $a=2b$，即 $a=2,b=1$ 时取等号），∴$2ab\geqslant2\sqrt{2ab}$，解得 $ab\geqslant2$（当且仅当 $a=2,b=1$ 时取等号），C 错误；

对于 D，∵$a^2+4b^2\geqslant4ab$（当且仅当 $a=2b$，即 $a=2,b=1$ 时取等号），由 C 知 $ab\geqslant2$（当且仅当 $a=2,b=1$ 时取等号），∴$a^2+4b^2\geqslant8$（当且仅当 $a=2,b=1$ 时取等号），D 正确. 故选 AD.

12. ACD　由 $x=m^2-n^2=(m+n)(m-n)$，则 $m+n,m-n$ 同为奇数或同为偶数，所以 $x$ 为奇数或 4 的倍数，故 A 正确；因为 $2k-1=k^2-(k-1)^2$，且 $k-1,k\in\mathbf{Z}$，所以 $x=2k-1\in M$，故 $\forall x=2k-1,k\in\mathbf{Z},x\in M$ 成立，故 C 正确；又 $2k+1=(k+1)^2-k^2$，所以 $\forall x=2k+1,k\in\mathbf{Z},x\in M$，由 $x,y\in M$，则 $x,y$ 为奇数或 4 的倍数，当 $x,y$ 中至少有一个为 4 的倍数时，则 $xy$ 为 4 的倍数，所以 $xy\in M$；当 $x,y$ 都为奇数时，可令 $x=2k_1+1,y=2k_2+1,k_1,k_2\in\mathbf{Z},x+y=2k_1+1+2k_2+1==2(k_1+k_2)+2,k_1,k_2\in\mathbf{Z}$，不妨取 $k_1=k_2=1$，可得 $x+y=6$，而 6 不是 4 的倍数，故 $x+y\notin M$，B 错误；所以 $xy=(2k_1+1)(2k_2+1)=2(2k_1k_2+k_1+k_2)+1,k_1,k_2\in\mathbf{Z}$，所以 $xy\in M$，故 $\forall x,y\in M,xy\in M$，故 D 正确. 故选 ACD.

13. 2　∵集合 $A=\{1,2\},B=\left\{2,\frac{2}{k}\right\},B\subseteq A$，∴由集合元素的互异性及子集的概念可知 $\frac{2}{k}=1$，解得 $k=2$.

14. 必要不充分　由已知可得 $p\Rightarrow q\Rightarrow r$，但 $r\not\Rightarrow p$，故 $r$ 是 $p$ 的必要不充分条件.

15. 3　设第一个括号填 $x$，第二个括号填 $y$，则 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1,x>0,y>0$，所以 $x+y=(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)=1+\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}+4\geqslant5+2\sqrt{4}=9$，当且仅当 $y=2x$ 且 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$，即 $x=3,y=6$ 时等号成立，所以小郭同学要想确保获得“优胜奖”，他应该在前一个括号内填上数字 3.

16. $m\geqslant2$　由 $x^2+ax-a^2\geqslant x-am+1$，得 $x^2+(a-1)x-a^2+am-1\geqslant0$. 由题意可得 $\exists a>0$，使得 $(a-1)^2+4(a^2-am+1)\leqslant0$ 成立，即 $\exists a>0$，使得 $m\geqslant\frac{5a}{4}+\frac{5}{4a}-\frac{1}{2}$ 成立. $\frac{5a}{4}+\frac{5}{4a}-\frac{1}{2}\geqslant2\sqrt{\frac{5a}{4}\cdot\frac{5}{4a}}-\frac{1}{2}=2$，当且仅当 $a=1$ 时等号成立，故 $m\geqslant2$.

17. 解：(1)因为 $B=\{-2\}$，所以关于 $x$ 的方程 $x^2+ax+a^2-12=0$ 有两个相等的实数根 $-2$，…………… 1 分

则 $\begin{cases}\Delta=0,\\-2+(-2)=-a,\\-2\times(-2)=a^2-12,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\pm4,\\a=4,\\a=\pm4,\end{cases}\Rightarrow a=4.$ …………………………………… 3 分

故实数 $a$ 的取值范围为 $\{4\}$. …………………………………… 4 分

(2) $A=\{x|x^2-x-2=0\}=\{2,-1\}$，…………………………………… 5 分

因为 $(B\cup A)\subseteq A$，所以 $B\cup A=A$，则 $B\subseteq A$，

所以 $B$ 可能为 $\varnothing,\{2\},\{-1\},\{2,-1\}$. …………………………………… 6 分

①若 $B=\varnothing$，则 $\Delta=a^2-4(a^2-12)<0\Rightarrow a>4$ 或 $a<-4$； …………………………………… 7 分

②若 $B=\{2\}$，则 $\begin{cases}\Delta=0,\\2+2=-a,\\2\times2=a^2-12,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\pm4,\\a=-4,\\a=\pm4,\end{cases}\Rightarrow a=-4$；…………………………………… 8 分

③若 $B=\{-1\}$，则$\begin{cases}\Delta=0,\\ -1+(-1)=-2=-a,\\ -1\times(-1)=a^2-12,\end{cases}\Rightarrow a\in\varnothing$；…………………… 9 分

④若 $B=\{2,-1\}$，则$\begin{cases}a=-1,\\ a^2-12=-2,\end{cases}\Rightarrow a\in\varnothing.$

综上，$a>4$ 或 $a\leqslant-4$. …………………… 10 分

18. 证明：充分性（条件⇒结论）

因为 $ab\neq0$，所以 $a^2-ab+b^2=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2>0$，

又 $a+b>1$，所以 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)>a^2-ab+b^2$，

所以充分性成立；…………………… 5 分

必要性（结论⇒条件）

因为 $a^3+b^3+ab-a^2-b^2=(a+b)(a^2-ab+b^2)+ab-a^2-b^2$

$=(a+b-1)(a^2-ab+b^2)>0$，

而 $a^2-ab+b^2=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}>0$，所以 $a+b-1>0$，

所以 $a+b>1$，所以必要性成立. …………………… 11 分

综上，$a^3+b^3+ab-a^2-b^2>0$ 的充要条件是 $a+b>1$. …………………… 12 分

19. 解：(1)因为 $ax^2-x+1<0$ 的解集为非空集合 $\{x|b<x<2b\}$，

所以方程 $ax^2-x+1=0$ 的两个根为 $b,2b$，且 $b>0,a>0$，…………………… 2 分

由根与系数关系得$\begin{cases}b+2b=\frac{1}{a},\\ b\times2b=\frac{1}{a},\end{cases}$解得 $b=\frac{3}{2}$ 或 $b=0$（舍去）.

故 $b$ 的值为 $\frac{3}{2}$. …………………… 5 分

(2)“关于 $x$ 的不等式 $ax^2-x+1<0$ 的解集为 $\varnothing$”即关于 $x$ 的不等式 $ax^2-x+1\geqslant0$ 恒成立. ………… 6 分

当 $a=0$ 时，不等式化为 $-x+1<0$，不恒成立，不符合题意；…………………… 8 分

当 $a\neq0$ 时，因为关于 $x$ 的一元二次不等式 $ax^2-x+1\geqslant0$ 恒成立，

所以$\begin{cases}a>0,\\ \Delta=1-4a\leqslant0,\end{cases}$解得 $a\geqslant\frac{1}{4}$.

综上，实数 $a$ 的取值范围是 $\left\{a\,\middle|\,a\geqslant\frac{1}{4}\right\}$. …………………… 12 分

20. 证明：(1) $\frac{y+m}{x+m}-\frac{y}{x}=\frac{x(y+m)-y(x+m)}{x(x+m)}=\frac{m(x-y)}{x(x+m)}$. …………………… 2 分

因为 $x>y>0,m>0$，所以 $x+m>0,x-y>0$，

所以 $\frac{m(x-y)}{x(x+m)}>0$，…………………… 4 分

即 $\frac{y}{x}<\frac{y+m}{x+m}$. …………………… 5 分

(2)因为 $a,b,c$ 是三角形的三边，所以 $b+c>a>0$，

由(1)知 $\frac{a}{b+c}<\frac{a+a}{b+c+a}=\frac{2a}{a+b+c}$，…………………… 8 分

同理$\frac{b}{a+c}<\frac{2b}{a+b+c}$，$\frac{c}{a+b}<\frac{2c}{a+b+c}$，…………………………………………………… 10分

所以$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}<\frac{2a}{a+b+c}+\frac{2b}{a+b+c}+\frac{2c}{a+b+c}=\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$，

所以原不等式成立. …………………………………………………………………… 12分

21. 解：(1)由题意可得，当$x=0$时，$\frac{k}{50}=24$，则$k=1\ 200$，

所以该合作社修建光伏电站的费用与16年所消耗的电费之和$F=16\times\frac{1\ 200}{x+50}+0.12x=\frac{19\ 200}{x+50}+0.12x$，

$x\geqslant0$. …………………………………………………………………………… 4分

(2)由(1)$F=\frac{19\ 200}{x+50}+0.12x=\frac{19\ 200}{x+50}+0.12(x+50)-6\geqslant2\sqrt{\frac{19\ 200}{x+50}\times0.12(x+50)}-6=90$，

当且仅当$\frac{19\ 200}{x+50}=0.12(x+50)$，即$x=350$时，等号成立，

即该合作社应修建面积为350 $m^2$的太阳能面板，

可使$F$最小，且最小值为90万元. ……………………………………………………… 8分

(3)为使$F$不超过140万元，只需$F=\frac{19\ 200}{x+50}+0.12x\leqslant140$，

整理得$3x^2-3\ 350x+305\ 000\leqslant0$，

则$(3x-3\ 050)(x-100)\leqslant0$，解得$100\leqslant x\leqslant\frac{3\ 050}{3}$，

即$x$的取值范围是$\left\{x\middle|100\leqslant x\leqslant\frac{3\ 050}{3}\right\}$. ……………………………………………… 12分

22. 解：(1)由题意，$|-2-t|>|1-t|$，

即$|t+2|>|t-1|$，

两边平方，得$(t+2)^2>(t-1)^2$，解得$t>-\frac{1}{2}$. ………………………………………… 3分

(2)因为$ab=1$，所以$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}=\frac{b^2+1}{(a^2+1)(b^2+1)}+\frac{a^2+1}{(a^2+1)(b^2+1)}=\frac{a^2+b^2+2}{a^2b^2+a^2+b^2+1}=1$.

…………………………………………………………………………………………… 5分

$\frac{a^2+b^2+2}{a-b}=\frac{(a-b)^2+2ab+2}{a-b}=\frac{(a-b)^2+4}{a-b}=a-b+\frac{4}{a-b}$，……………………………… 6分

当$a>b$时，$a-b+\frac{4}{a-b}\geqslant2\sqrt{(a-b)\cdot\frac{4}{a-b}}=4$，当且仅当

$a-b=\frac{4}{a-b}$，即$a=\sqrt{2}+1$，$b=\sqrt{2}-1$，或$a=1-\sqrt{2}$，$b=-1-\sqrt{2}$时等号成立，所以$\frac{a^2+b^2+2}{a-b}\geqslant4$.

此时$\left|\frac{a^2+b^2+2}{a-b}-2\right|\geqslant2>1$，$\frac{a^2+b^2+2}{a-b}$比$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}$远离2；………………………………… 9分

当$a<b$时，$a-b+\frac{4}{a-b}\leqslant-\left[(b-a)+\left(\frac{4}{b-a}\right)\right]\leqslant-2\sqrt{(b-a)\cdot\frac{4}{b-a}}=-4$，当且仅当

$b-a=\frac{4}{b-a}$，即$a=\sqrt{2}-1$，$b=\sqrt{2}+1$，或$a=-1-\sqrt{2}$，$b=1-\sqrt{2}$时等号成立，所以$\frac{a^2+b^2+2}{a-b}\leqslant-4$.

此时$\left|\frac{a^2+b^2+2}{a-b}-2\right|\geqslant6>1$，$\frac{a^2+b^2+2}{a-b}$比$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}$远离2.

综上，$\frac{a^2+b^2+2}{a-b}$比$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}$远离2. ……………………………………………… 12分

# 关于我们