参照秘密级管理★启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：A

2020 级高三上学期校际联合考试

数学试题

2022．08

考生注意：

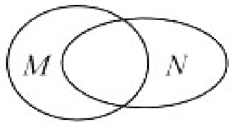
1．答题前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束，将试题卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $M=\{x\in\mathbf{Z}|-1\le x\le 1\}$，$N=\{x\in\mathbf{Z}|x(x-2)\le 0\}$，则如图所示的韦恩图中的阴影部分所表示的集合为



A．$\{-1,2\}$　　B．$\{0,1\}$　　C．$\{-1,0,1\}$　　D．$\{-1,0,1,2\}$

2．已知 $(1-\mathrm{i})^2z=2+2\mathrm{i}$，则 $|z|=$

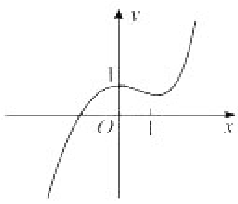
A．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．$2\sqrt{2}$

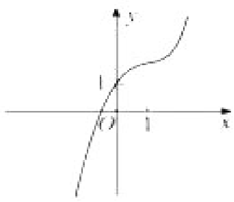
3．已知函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上的图像连续不断，则“$f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上有零点”是“$f(-2)\cdot f(2)<0$”的

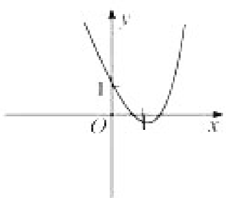
A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

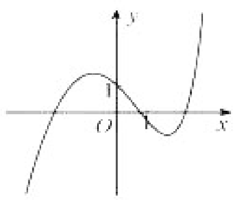
C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-x^2-2x$ 的图像大致为

A．

B．

C．

D．

5．设正实数 m，n 满足 $m+n=2$，则 $\dfrac{n}{m}+\dfrac{1}{2n}$ 的最小值是

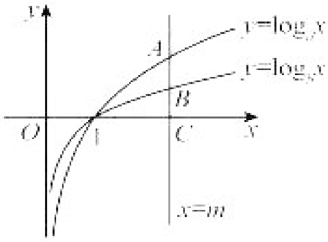
A．$\dfrac{3}{2}$　　B．$\dfrac{5}{2}$　　C．$\dfrac{5}{4}$　　D．$\dfrac{9}{4}$

6．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=-9$，$a_5=-1$．记 $T_n=a_1a_2\cdots a_n(n=1,2,\cdots)$，则数列 $\{T_n\}$

A．有最大项，有最小项　　B．有最大项，无最小项

C．无最大项，有最小项　　D．无最大项，无最小项

7. 如图，直线 $x=m(m>1)$ 与曲线 $y=\log_a x$，$y=\log_b x$ 及 x 轴依次相交于点 A，B，C，若 B 是线段 AC 的中点，则



A. $1<b\le 2a-1$　　B. $1<b\le 2a$

C. $b>2a-1$　　D. $b>2a$

8. 已知 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，若 $|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}|\le 1$，则 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 的取值范围是

A. $[-4,4]$　　B. $[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$　　C. $[0,2\sqrt{3}]$　　D. $[0,4]$

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的，全部选对得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 八卦是我国古代的一套有象征意义的符号．如图 1 是八卦模型图，其平面图形记为图 2 中的正八边形 $ABCDEFGH$，其中 $|OA|=1$，则

A. $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}$

B. $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OH}=-\sqrt{2}\overrightarrow{OE}$

C. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HO}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BO}$

图 1

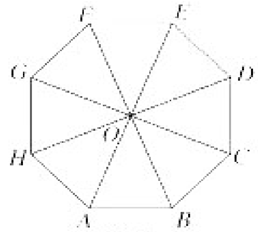
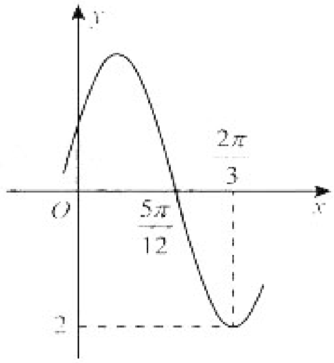


图 2

10. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（其中 $A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\pi$）的部分图像如图所示，则



A. 函数 $f(x)$ 的图像关于 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 直线对称

B. 函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(-\dfrac{\pi}{12},0)$ 对称

C. 函数 $f(x)$ 在区间 $[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}]$ 上单调递增

D. $y=1$ 与图像 $y=f(x)(-\dfrac{\pi}{12}\le x\le\dfrac{23\pi}{12})$ 的所有交点的横坐标之和为 $\dfrac{8\pi}{3}$

11. 已知函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)=f(x-2)$．当 $x\in[0,2)$ 时，$f(x)=\begin{cases}1-x, & x\in[0,1),\\ \dfrac{2}{3-x}-1, & x\in[1,2).\end{cases}$

若函数 $g(x)=f(x)-k$ 在 $[0,+\infty)$ 上的零点从小到大恰好构成一个等差数列，则 k 的可能取值为

A. 0　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{2}-1$

12．当 $1<x_1<x_2$ 时，不等式 $x_2e^{x_1}-x_1e^{x_2}<0$ 成立．若 $b>e^a>e$，则

A．$e^b>be^{a-1}$　　B．$e^{a+b}<be^{e^a}$　　C．$ae^b<b\ln a$　　D．$ab>e^a\ln b$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知 $\alpha\in\{-2,-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,2,3\}$，若幂函数 $f(x)=x^\alpha$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增，且其图像不过坐标原点，则 $\alpha=$____________.

14．已知 $\sin(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2})=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{6})$ 的值为____________.

15．设函数 $f(x)=e^x(x+1)$ 的图像在点 $(0,1)$ 处的切线为 $y=ax+b$，若方程 $|a^x-b|=m$ 有两个不等实根，则实数 m 的取值范围是____________.

16．已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，且图像关于直线 $x=1$ 对称，当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=x(2-x)$，对于闭区间 I，用 M_I 表示 $y=f(x)$ 在 I 上的最大值．若正数 k 满足 $M_{[0,k]}=2M_{[k,2k]}$，则 k 的值可以是____________．（写出一个即可）．

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17．（10 分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x-1$，$x\in\mathbf{R}$．

（1）求函数 $f(x)$ 的最小值和最小正周期；

（2）已知 $\triangle ABC$ 内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $c=3$，$f(C)=0$，若向量 $\boldsymbol{m}=(1,\sin A)$ 与 $\boldsymbol{n}=(2,\sin B)$ 共线，求 a，b 的值．

18．（12 分）

已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 中，$a_1=b_1=c_1=1$，$c_n=a_{n+1}-a_n$，$c_{n+1}=\frac{b_n}{b_{n+2}}\cdot c_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$．

（1）若数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，且公比 $q>0$，且 $b_1+b_2=6b_3$，求 q 与 a_n 的通项公式；

（2）若数列 $\{b_n\}$ 为等差数列，且公差 $d>0$，证明：$c_1+c_2+\cdots+c_n<1+\frac{1}{d}\ (n\in\mathbf{N}^*)$．

19．（12 分）

已知函数 $f(x)=\log_3[(\frac{1}{9})^x+1]+kx\ (k\in\mathbf{R})$ 是偶函数．

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

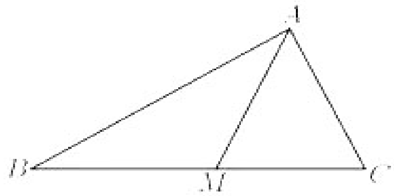
（2）设函数 $g(x)=\log_3(\frac{m}{3^x}-2m)$，其中 $m>0$，若方程 $f(x)-x=g(x)$ 存在实数解，求实数 m 的取值范围．

20.（12 分）

如图，已知在$\triangle ABC$中，M为BC上一点，$AB=2AC\le BC$，$B\in(0,\frac{\pi}{2})$，且$\sin B=\frac{\sqrt{15}}{8}$.

（1）若$AM=BM$，求$\frac{AC}{AM}$的值；

（2）若AM为$\angle BAC$的平分线，且$AC=1$，求$\triangle ACM$的面积.

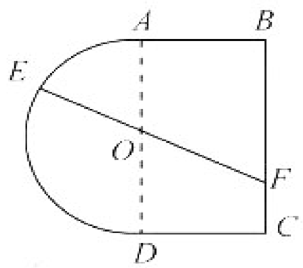


21.（12 分）

一个玩具盘由一个直径为 2 米的半圆O和一个矩形$ABCD$构成，$AB=1$米，如图所示，小球从A点出发以$5v$的速度沿半圆O轨道匀速运动到某点E处，经弹射后，以$6v$的速度沿EO的方向匀速运动到BC上某点F处，设$\angle AOE=\theta$弧度，小球从A到F所需时间为T.

（1）试将T表示为θ的函数$T(\theta)$，并写出定义域；

（2）当θ满足什么条件时，时间T最短.



22.（12 分）

已知函数$f(x)=|\frac{a-xe^x}{x}|-a\ln x$.

（1）当$a=-1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线与两坐标轴围成的三角形面积；

（2）若$f(x)>a$，求实数a的取值范围.

参照秘密级管理★启用前　　　　　　　　　　　　试卷类型：A

2020 级高三上学期校际联合考试

数学试题参考答案

2022．08

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．【答案】A　【解析】由题意得，$M=\{-1,0,1\}$，$N=\{0,1,2\}$ $M\cup N=\{-1,0,1,2\}$，$M\cap N=\{0,1\}$，阴影部分为 $C_{(M\cup N)}(M\cap N)=\{-1,2\}$，故选 A．

2．【答案】B　【解析】∵ $(1-i)^2z=2+2i$，∴ $z=\frac{2+2i}{(1-i)^2}=\frac{2+2i}{-2i}=\frac{2i-2}{2}=-1+i$，$|z|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$，故选：B．

3．【答案】B　【解析】已知函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上的图像连续不断，根据零点存在性定理，若 $f(-2)\cdot f(2)<0$，则 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上有零点；若有 $f(-2)=0$ 或者 $f(2)=0$，$f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上有零点，但是 $f(-2)\cdot f(2)<0$ 不成立．故选 B．

4．【答案】D　【解析】解法一：因为 $f'(x)=e^x-2x-2$，设 $g(x)=f'(x)$，$g'(x)=e^x-2$，

令 $g'(x)=e^x-2=0$，得 $x=\ln 2$，当 $x<\ln 2$ 时 $g'(x)<0$，$g(x)$ 为减函数，即 $f'(x)$ 为减函数；当 $x>\ln 2$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 为增函数，即 $f'(x)$ 为增函数．

而 $f'(\ln 2)=2-2\ln 2-2=-2\ln 2<0$，所以原函数存在两个极值点．

故排除选项 B 和 C．将 $x=1$ 代入原函数，求得 $f(1)=e-1-2<0$，排除选项 A．

解法二：$f(1)=e-2-1<0$，排除选项 A，B；当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)=e^x-x(x+2)\to-\infty$，排除选项 C．故选 D．

5．【答案】C　【解析】因为正实数 m、n，

所以 $\frac{n}{m}+\frac{1}{2n}=\frac{n}{m}+\frac{m+n}{4n}=\frac{n}{m}+\frac{m}{4n}+\frac{1}{4}\geq 2\sqrt{\frac{n}{m}\cdot\frac{m}{4n}}+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$，

当且仅当 $\frac{n}{m}=\frac{m}{4n}$ 且 $m+n=2$，即 $m=\frac{4}{3}$，$n=\frac{2}{3}$ 时取等号，此时取得最小值 $\frac{5}{4}$，C 正确；

6．【答案】B　【解析】由题意可知，等差数列的公差 $d=\frac{a_5-a_1}{5-1}=\frac{-1+9}{5-1}=2$，

则其通项公式为：$a_n=a_1+(n-1)d=-9+(n-1)\times 2=2n-11$，

注意到 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<0<a_6=1<a_7<\cdots$，

且由 $T_5<0$ 可知 $T_i<0(i\geq 6,i\in N)$，

由 $\frac{T_i}{T_{i-1}}=a_i>1(i\geq 7,i\in N)$ 可知数列 $\{T_n\}$ 不存在最小项，

由于 $a_1=-9,a_2=-7,a_3=-5,a_4=-3,a_5=-1,a_6=1$，

故数列 $\{T_n\}$ 中的正项只有有限项：$T_2=63$，$T_4=63\times 15=945$．

故数列 $\{T_n\}$ 中存在最大项，且最大项为 T_4．

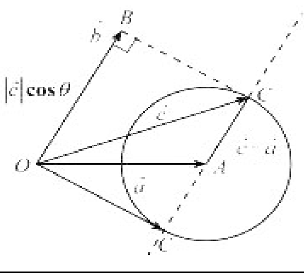
故选：B．

7．【答案】C　【解析】根据题意，A、B、C 三点的坐标分别为 $A(m,\log_a m)$，$B(m,\log_b m)$，$C(m,0)(m>1)$ 又 B 是线段 AC 的中点，即 $AB=BC$，所以 $\log_a m-\log_b m=\log_b m-0$，计算得：$\log_a m=2\log_b m=2\frac{\log_a m}{\log_a b}$，

所以 $\log_a b=2$，故 $b=a^2$，又由图知，a，$b\in(1,+\infty)$，

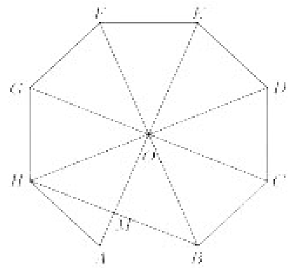
$b-(2a-1)=a^2-2a+1=(a-1)^2>0$，所以 $b>2a-1$ 选项 C 正确．

8．【答案】D　【解析】



高三数学试题答案　第 1 页

解法 1：取 $\overline{OA}=\boldsymbol{a},\overline{OB}=\boldsymbol{b},\overline{OC}=\boldsymbol{c}$，则点 C 在以 A 为圆心，半径为 1 的圆面上（包括边界），设向量 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的夹角为 θ，由图



可知，θ 取值范围为 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$；

$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\theta=2|\boldsymbol{c}|\cos\theta$，由于 $|\boldsymbol{c}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{c}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影，且 $0\le|\boldsymbol{c}|\cos\theta\le2$，故 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 的取值范围是 [0，4]。

解法 2：不妨设 $\boldsymbol{a}=(2,0)$，$\boldsymbol{b}=(1,\sqrt{3})$，$\boldsymbol{c}=(x,y)$，

因为 $|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}|\le1$，所以 $(x-2)^2+y^2\le1$，设 $x=2+r\cos\alpha$，$y=r\sin\alpha$，$0\le r\le1$，$\alpha\in\mathbf{R}$，

所以

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=x+\sqrt{3}y=2+r\cos\alpha+\sqrt{3}r\sin\alpha=2+2r\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})$$

由于 $-1\le-r\le r\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})\le r\le1$，故 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\in[0,4]$

故选：D．

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的，全部选对得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分。

9．【答案】BC 【解析】

对于 A，两向量方向相反，故错误．

对于 B，连接 BH 交 OA 于 M，由 $|OH|=|OB|=1,\angle HOB=90^\circ$ 可得 $|OM|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，由向量的平行四边形法则可得 $\overline{OB}+\overline{OH}=2\overline{OM}$，

又 $|OE|=1$，则 $\overline{OB}+\overline{OH}=2\overline{OM}=-\sqrt{2}\overline{OE}$，B 正确；

对于 C，由正八边形可得 $\angle AOB=45^\circ$，则 $\overline{OA}\cdot\overline{OD}=|\overline{OA}|\cdot|\overline{OD}|\cos\angle AOD=1\times1\times\cos135^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，C 正确；

对于 D，$\overline{AH}\cdot\overline{HO}=-\overline{HA}\cdot\overline{HO}=-|\overline{HA}|\cdot|\overline{HO}|\cos\angle OHA$，$\overline{BC}\cdot\overline{BO}=|\overline{BC}|\cdot|\overline{BO}|\cos\angle OBC$，

易得 $\angle OHA=\angle OBC=67.5^\circ$，又 $|HA|=|BC|,|HO|=|BO|$，则 $\overline{AH}\cdot\overline{HO}=-\overline{BC}\cdot\overline{BO}$，D 错误；

故选：BC．

10、【答案】BCD

【解析】由题意 $A=2$，$T=4\times\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{12}\right)=\pi$，$\therefore\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$，

又 $2\sin\left(2\times\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=-2$，$\frac{4\pi}{3}+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2},k\in Z$，又 $|\varphi|<\pi$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{6}$，

$\therefore f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，$\because 2\times\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$，$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 不是对称轴，A 错；

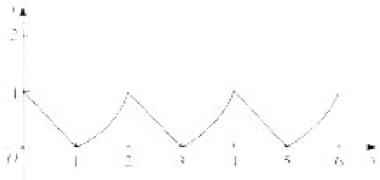
$\sin\left[2\times\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=0$，$\therefore\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$ 是对称中心，B 正确；

$x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$\therefore f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增，C 正确；

$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1$，$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，$2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in Z$，即 $x=k\pi$ 或 $x=k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in Z$，又 $-\frac{\pi}{12}\le x\le\frac{23\pi}{12}$，$\therefore x=0,\frac{\pi}{3},\pi,\frac{4\pi}{3}$，和为 $\frac{8\pi}{3}$，D 正确．故选：BCD．

11．【答案】ABD

【解析】由已知，$f(x+2)=f(x)$，则 $f(x)$ 的周期为 2．其大致图像如图所示，由图可知，



① 当 $k=0$ 时，$g(x)$ 零点为 1、3、5、7、…，满足题意；
② 当 $k=1$ 时，$g(x)$ 零点为 0、2、4、6、…，满足题意；
③ 当 $k\in(0,1)$ 时，若零点从小到大构成等差数列 $\{x_n\}$，公差只能为 1，
由 $1-x_1=\dfrac{x_2-1}{3-x_2}=\dfrac{(x_1+1)-1}{3-(x_1+1)}$，得 $x_1=2-\sqrt{2}$，此时 $k=1-x_1=\sqrt{2}-1$；
④ 当 $k\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ 时，函数 $g(x)$ 无零点，不符合题意.
故选：ABD.

12. 【答案】AD【解析】

当 $1<x_1<x_2$ 时，不等式 $x_2e^{x_1}-x_1e^{x_2}<0\Leftrightarrow\dfrac{e^{x_1}}{x_1}<\dfrac{e^{x_2}}{x_2}$，令 $f(x)=\dfrac{e^x}{x},x>1$，则 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

因 $b>e>1$，则 $f(b)>f(e)\Leftrightarrow\dfrac{e^b}{b}>\dfrac{e^e}{e}\Leftrightarrow e^b>be^{e-1}$，A 正确；

因 $b>e^a>1$，则 $f(b)>f(e^a)\Leftrightarrow\dfrac{e^b}{b}>\dfrac{e^{e^a}}{e^a}\Leftrightarrow e^{a+b}>be^{e^a}$，B 不正确；

由 $e^a>e$ 知，$a>1$，有 $f(a)>f(1)\Leftrightarrow\dfrac{e^a}{a}>e>1\Leftrightarrow e^a>a$，则 $a>\ln a\Leftrightarrow\dfrac{\ln a}{a}<1$，

由选项 A 知，$\dfrac{e^b}{b}>1$，即 $\dfrac{e^b}{b}>\dfrac{\ln a}{a}\Leftrightarrow ae^b>b\ln a$，C 不正确；

由 $b>e^a>e$ 得，$\ln b>a>1$，则 $f(\ln b)>f(a)\Leftrightarrow\dfrac{e^{\ln b}}{\ln b}>\dfrac{e^a}{a}\Leftrightarrow ab>e^a\ln b$，D 正确.

故选：AD

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.【答案】-2

【解析】因为幂函数 $f(x)=x^\alpha$ 图像不过坐标原点，故 $\alpha<0$，又 $f(x)=x^\alpha$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增，故 $\alpha=-2$；故答案为：-2

14.【答案】$-\dfrac{7}{9}$

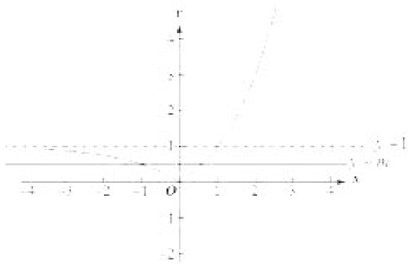
【解析】由 $\sin(\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\alpha}{2})=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 得

$\cos(\dfrac{\pi}{6}-\alpha)=1-2\sin^2(\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\alpha}{2})=1-2\times(\dfrac{\sqrt{3}}{3})^2=\dfrac{1}{3}$，

所以 $\cos(\dfrac{\pi}{3}-2\alpha)=2\cos^2(\dfrac{\pi}{6}-\alpha)-1=2\times(\dfrac{1}{3})^2-1=-\dfrac{7}{9}$，

所以

$\sin(2\alpha+\dfrac{\pi}{6})=\cos\left[\dfrac{\pi}{2}-(2\alpha+\dfrac{\pi}{6})\right]=\cos(\dfrac{\pi}{3}-2\alpha)=-\dfrac{7}{9}$.



15.【答案】$(0,1)$

【解析】由 $f(x)=e^x(x+1)$ 可得 $f'(x)=e^x(x+2)$，
在点 $(0,1)$ 处的切线斜率为 $k=f'(0)=e^0(0+2)=2$，所以 $a=2$，
将点 $(0,1)$ 代入 $y=ax+b$ 可得 $b=1$，
所以方程 $|a^x-b|=m$，即 $|2^x-1|=m$ 有两个不等实根，
等价于 $y=|2^x-1|$ 与 $y=m$ 图像有两个不同的交点，

作 $y=\left|2^x-1\right|$ 的图像如图所示；

由图知：若 $y=\left|2^x-1\right|$ 与 $y=m$ 图像有两个不同的交点则 $0<m<1$.

16.【答案】$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{10-\sqrt{2}}{4}$

【解析】因为 $f(x)$ 是定义域为R的奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，

又函数图像关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(2-x)=f(x)$，

所以 $f(2+x)=f[2-(2+x)]=f(-x)=-f(x)$，所以 $f(4+x)=-f(2+x)=f(x)$，

即 $f(x)$ 是以4为周期的周期函数，

又当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=x(2-x)$，

令 $x\in[-2,0)$，则 $-x\in(0,2]$，所以 $f(-x)=-x(2+x)=-f(x)$，

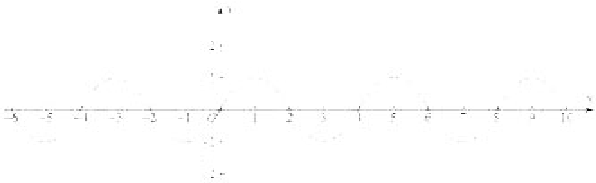
所以 $f(x)=x(x+2)$，

所以当 $x\in(2,4]$ 时 $f(x)=(x-4)(x-2)$，

$x\in[4,6]$ 时 $f(x)=(x-4)(6-x)$，

……

所以 $f(x)$ 的部分图像如下所示：



若 $0<k\le\frac{1}{2}$，则 $0<2k\le1$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，所以

$M_{[0,k]}=k(2-k)$，$M_{[k,2k]}=2k(2-2k)$，显然不满足 $M_{[0,k]}=2M_{[k,2k]}$，

若 $\frac{1}{2}<k\le1$，则 $1<2k\le2$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，在 $[1,2]$ 上单调递减，

所以 $M_{[0,k]}=k(2-k)$，$M_{[k,2k]}=1$，显然不满足 $M_{[0,k]}=2M_{[k,2k]}$，

若 $1<k\le2$，则 $2<2k\le4$，所以 $M_{[0,k]}=1$，$M_{[k,2k]}=k(2-k)$，由 $M_{[0,k]}=2M_{[k,2k]}$，

即 $1=2k(2-k)$，解得 $k=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ 或 $k=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$（舍去）；

若 $2<k\le3$，则 $4<2k\le6$，所以 $M_{[0,k]}=1$，$M_{[k,2k]}=(2k-4)(6-2k)$ 或 $M_{[k,2k]}=1$，由 $M_{[0,k]}=2M_{[k,2k]}$，

即 $1=2(2k-4)(6-2k)$，解得 $k=\frac{10-\sqrt{2}}{4}$ 或 $k=\frac{10+\sqrt{2}}{4}$（舍去）；

当 $k\in[3,+\infty)$ 时，$2k\in[6,+\infty)$，所以 $M_{[0,k]}=1$，$M_{[k,2k]}=1$，显然不满足 $M_{[0,k]}=2M_{[k,2k]}$，故舍去；

故答案为：$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{10-\sqrt{2}}{4}$

四、解答题：共70分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（10分）解：（1）$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x-1=\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1$. …3分

∴ $f(x)$ 的最小值为 -2，最小正周期为 π . ……………………………………5分

（2）∵ $f(C)=\sin(2C-\frac{\pi}{6})-1=0$，即 $\sin(2C-\frac{\pi}{6})=1$，

∵ $0<C<\pi$，$-\frac{\pi}{6}<2C-\frac{\pi}{6}<\frac{11\pi}{6}$，∴ $2C-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，∴ $C=\frac{\pi}{3}$.

∵ $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 共线，∴ $\sin B-2\sin A=0$.

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得 $b=2a$. ①

∵ $c=3$，由余弦定理，得 $9=a^2+b^2-2ab\cos\frac{\pi}{3}$，　②

解方程组①②，得 $\begin{cases}a=\sqrt{3}\\ b=2\sqrt{3}\end{cases}$ 　　……………………………………………10 分

18.（12 分）

解：（1）依题意 $b_1=1, b_2=q, b_3=q^2$，而 $b_1+b_2=6b_3$，即 $1+q=6q^2$，由于 $q>0$，所以解得 $q=\frac{1}{2}$． 　　……………………………………………2 分

所以 $b_n=\frac{1}{2^{n-1}}$，所以 $b_{n+2}=\frac{1}{2^{n+1}}$，故 $c_{n+1}=\frac{\frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{1}{2^{n+1}}}\cdot c_n=4\cdot c_n$，所以数列 $\{c_n\}$ 是首项为1，公比为4的等比数列，所以 $c_n=4^{n-1}$． 　　……………………………………………3 分

所以 $a_{n+1}-a_n=c_n=4^{n-1}$（$n\ge 2, n\in N^*$）．

所以 $a_n=a_1+1+4+\cdots+4^{n-2}=\frac{4^{n-1}+2}{3}$，又 $n=1$，$a_1=1$ 符合．

故 $a_n=\frac{4^{n-1}+2}{3}$． 　　……………………………………………6 分

（2）依题意设 $b_n=1+(n-1)d=dn+1-d$，由于 $\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{b_n}{b_{n+2}}$，

所以 $\frac{c_n}{c_{n-1}}=\frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}\ (n\ge 2, n\in N^*)$，

故 $c_n=\frac{c_n}{c_{n-1}}\cdot\frac{c_{n-1}}{c_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{c_3}{c_2}\cdot\frac{c_2}{c_1}\cdot c_1=\frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}\cdot\frac{b_{n-2}}{b_n}\cdot\frac{b_{n-3}}{b_{n-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{b_2}{b_4}\cdot\frac{b_1}{b_3}\cdot c_1$

$=\frac{b_1b_2}{b_nb_{n+1}}=\frac{1+d}{d}\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=\left(1+\frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)(n\ge 2)$，

又 $c_1=1$，而 $\left(1+\frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_2}\right)=\frac{d+1}{d}\times\frac{d}{b_1b_2}=\frac{d+1}{d}\times\frac{d}{1\times(d+1)}=1$，

故 $c_n=\left(1+\frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)(n\ge 1)$ 　　……………………………………………10 分

所以 $c_1+c_2+\cdots+c_n=\left(1+\frac{1}{d}\right)\left[\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_2}\right)+\left(\frac{1}{b_2}-\frac{1}{b_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)\right]$

$=\left(1+\frac{1}{d}\right)\left(1-\frac{1}{b_{n+1}}\right)$．

由于 $d>0, b_1=1$，所以 $b_{n+1}>0$，所以 $\left(1+\frac{1}{d}\right)\left(1-\frac{1}{b_{n+1}}\right)<1+\frac{1}{d}$．

即 $c_1+c_2+\ldots+c_n<1+\frac{1}{d}$，　$n\in \mathbf{N}^*$． 　　……………………………………………12 分

19．解：(1)法一：∵ $f(x)$ 是偶函数，$f(-1)=f(1)$，$\log_3[(\frac{1}{9})^{-1}+1]-k=\log_3[(\frac{1}{9})+1]+k$

$\log_3 10-k=\log_3\frac{10}{9}+k$，$\log_3 10-k=\log_3 10-\log_3 9+k$，∴ $k=1$． 　　……1 分

经检验可知，$k=1$时，$f(x)$是偶函数。 …6 分

法二∵ $f(x)$是偶函数，∴ $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=f(x)$，

即 $\log_3[(\frac{1}{9})^{-x}+1]+k(-x)=\log_3[(\frac{1}{9})^{x}+1]+kx$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

即 $2kx=\log_3(9^{x}+1)-\log_3(9^{-x}+1)=\log_3\frac{9^{x}+1}{9^{-x}+1}=\log_3 9^{x}=2x$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立， ……1 分

∴ $2x(k-1)=0$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立，∵ x 不恒为 0，∴ $k=1$，∴ $f(x)=\log_3[(\frac{1}{9})^{x}+1]+x$， …6 分

(2) 方程 $f(x)-x=g(x)$ 存在实数解，即 方程 $\log_3[(\frac{1}{9})^{x}+1]=\log_3(\frac{m}{3^{x}}-2m)$ 存在实数解，

又∵ 对数函数 $y=\log_3 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

∴即方程 $(\frac{1}{9})^{x}+1=\frac{m}{3^{x}}-2m$ 存在实数解 ……………………………………8 分

令 $t=3^{-x}$，则 $t>0$，

方程化为 $t^2+1=mt-2m$，

即关于 t 的方程 $m(t-2)=t^2+1$ 存在正数解，

∵ $m>0$，$t^2+1>1$，∴ $t>2$，$t-2>0$，

∴方程 $m=\frac{t^2+1}{t-2}$ 存在正数解，即函数 y＝m 与函数 $y=\frac{t^2+1}{t-2}$，t>2 图像有交点， ………9 分

∵ $\frac{t^2+1}{t-2}=\frac{(t-2)^2+4t-3}{t-2}=\frac{(t-2)^2+4(t-2)+5}{t-2}=(t-2)+\frac{5}{t-2}+4$

$\ge 4+2\sqrt{(t-2)\cdot\frac{5}{t-2}}=4+2\sqrt{5}$，当且仅当 $t-2=\frac{5}{t-2}$，即 $t=\sqrt{5}+2$ 时，等号成立，

∴根据对勾函数的图像性质知 $m\geqslant 4+2\sqrt{5}$，即实数 m 的取值范围为 $\left[2\sqrt{5}+4,+\infty\right)$。 …12 分

20．解：（1）因为 $\sin B=\frac{\sqrt{15}}{8}$，$B\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{7}{8}$， ………………1 分

因为 $AB=2AC$，所以由正弦定理知 $\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{AB}{AC}=2$，即 $\sin C=2\sin B$， ………………3 分

因为 $AM=BM$，所以 $\angle AMC=2\angle B$，$\sin\angle AMC=\sin 2B=2\sin B\cos B$，在 $\triangle ACM$ 中，

$\frac{AC}{AM}=\frac{\sin\angle AMC}{\sin C}=\frac{2\sin B\cos B}{2\sin B}=\cos B=\frac{7}{8}$， ……………………………………6 分

（2）由题意知 $AB=2AC=2$，设 $BC=x$，由余弦定理得 $\cos B=\frac{2^2+x^2-1^2}{4x}=\frac{7}{8}$，解得 $BC=2$ 或 $BC=\frac{3}{2}$，因为 $2AC\le BC$，所以 $BC=2$，因为 AM 为 $\angle BAC$ 的平分线，$\angle BAM=\angle CAM$ 所以

$\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ACM}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AM\sin\angle BAM}{\frac{1}{2}AC\cdot AM\sin\angle CAM}=\frac{\frac{1}{2}BM\times h}{\frac{1}{2}CM\times h}$（$h$ 为底边 BC 的高），

所以 $\frac{BM}{CM}=\frac{AB}{AC}=2$， ……………………………………10 分

故 $CM=\frac{1}{3}BC=\frac{2}{3}$，而由（1）知 $\sin C=2\sin B=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

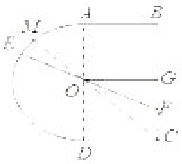
所以 $S_{\triangle ACM}=\frac{1}{2}AC\cdot CM\cdot\sin C=\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{12}$， ……………………………12 分

21．（12 分）

解：（1）连接 CO 并延长交半圆于 M，则 $\angle AOM=\angle COD=\frac{\pi}{4}$，故 $\theta\ge\frac{\pi}{4}$，

同理可得 $\theta\le\frac{3\pi}{4}$，$\therefore \theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$． ……………………………2 分

过 O 作 $OG\perp BC$ 于 G，则 $OG=1$，$\angle GOF=|\frac{\pi}{2}-\theta|$，



$\therefore OF=\frac{1}{\cos|\frac{\pi}{2}-\theta|}=\frac{1}{\sin\theta}$，又 $\overset{\frown}{AE}=\theta$，

$\therefore T(\theta)=\frac{\theta}{5v}+\frac{1}{6v}+\frac{1}{6v\sin\theta}$，$\theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$． ……………………………6 分

（2）$T'(\theta)=\frac{1}{5v}-\frac{\cos\theta}{6v\sin^2\theta}=\frac{6\sin^2\theta-5\cos\theta}{30v\sin^2\theta}=\frac{-6\cos^2\theta-5\cos\theta+6}{30v\sin^2\theta}$，

令 $T'(\theta)=0$ 可得 $-6\cos^2\theta-5\cos\theta+6=0$，解得 $\cos\theta=\frac{2}{3}$ 或 $\cos\theta=-\frac{3}{2}$（舍），………9 分

设 $\cos\theta_0=\frac{2}{3}$，$\theta_0\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$，

则当 $\frac{\pi}{4}\le\theta<\theta_0$ 时，$T'(\theta)<0$，当 $\theta_0<\theta\le\frac{3\pi}{4}$ 时，$T'(\theta)>0$，

∴当 $\theta=\theta_0$，$T(\theta)$ 取得最小值，

故当 $\cos\theta=\frac{2}{3}$ 时，时间 T 最短． ……………………………12 分

22．（12 分）

解：（1）当 $a=-1$ 时，$f(x)=e^x+\frac{1}{x}+\ln x$，$f'(x)=e^x-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$，$k=f'(1)=e$，

切点 $(1,e+1)$，∴切线方程为 $y=e(x-1)+e+1$，即 $y=ex+1$，……………………………3 分

令 $x=0$，得 $y=1$；令 $y=0$，得 $x=-\frac{1}{e}$，

所以三角形的面积是：$S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{e}\times1=\frac{1}{2e}$； ……………………………4 分

(2)①当 $a\le0$ 时，$f(x)=e^x-\frac{a}{x}-a\ln x$，此时 $f(x)-a=e^x-a\left(\frac{1}{x}+\ln x+1\right)$．

令 $g(x)=\frac{1}{x}+\ln x+1$，$g'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}$，

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)\ge g(1)=2$， ……………………………6 分

又 $a\le0$ 则 $-a\left(\frac{1}{x}+\ln x+1\right)\ge0$，

又 $e^x>0$，所以 $f(x)-a=e^x-a\left(\frac{1}{x}+\ln x+1\right)>0$，

$\therefore f(x)-a>0$ $\therefore f(x)>a$，此时 $a\le0$ 符合题意． ……………………………7 分

②当 $a>0$ 时，$f(x)=\left|e^x-\frac{a}{x}\right|-a\ln x=\left|\frac{xe^x-a}{x}\right|-a\ln x=\frac{|xe^x-a|}{x}-a\ln x$，

令 $h(x)=xe^x-a\ (x>0)$，$h'(x)=(x+1)e^x\ (x>0)$，则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $h(0)=-a<0$，$h(a)=a(e^a-1)>0$，

存在唯一的 $x_0\in(0,a)$ 使 $h(x_0)=0$，且 $a=x_0e^{x_0}$

所以 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x}-e^x-a\ln x, & 0<x<x_0,\\ e^x-\dfrac{a}{x}-a\ln x, & x>x_0,\end{cases}$ ……………………………9 分

当 $0<x\le x_0$ 时，$f(x)=\dfrac{a}{x}-e^x-a\ln x$，由 $f'(x)=-\dfrac{a}{x^2}-e^x-\dfrac{a}{x}<0$，

则 $f(x)$ 在 $(0,x_0]$ 上单调递减，

当 $x>x_0$ 时，$f(x)=e^x-\dfrac{a}{x}-a\ln x$，由 $f'(x)=e^x-\dfrac{a}{x}+\dfrac{a}{x^2}$，（分开考虑导函数符号）

当 $x>x_0$ 时，$y=e^x-\dfrac{a}{x}$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上单调递增，则 $e^x-\dfrac{a}{x}\ge e^{x_0}-\dfrac{a}{x_0}=e^{x_0}-\dfrac{x_0e^{x_0}}{x_0}=0$，

所以当 $x>x_0$ 时，$f'(x)=e^x-\dfrac{a}{x}+\dfrac{a}{x^2}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)\ge f(x_0)$，由题意则 $f(x_0)=e^{x_0}-\dfrac{a}{x_0}-a\ln x_0=-a\ln x_0>a\Rightarrow 0<x_0<\dfrac{1}{e}$，

设 $y=xe^x$，则 $y'=(x+1)e^x>0$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 上恒成立，所以 $y=xe^x$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 上单调递增，

此时 $a=x_0e^{x_0}\in\left(0,\dfrac{1}{e}e^{\frac{1}{e}}\right)$，即 $a\in\left(0,e^{\frac{1}{e}-1}\right)$，

综上所述：实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,e^{\frac{1}{e}-1}\right)$。 ……………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。