2023 高考素养调研第三次模拟考试

文科数学参考答案及评分标准

一、单选题（本大题共 12 小题，每小题 5 分）

1~5．DCCBB　6~10．BDAAB　11~12．DC

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分）

13．$\sqrt{2}$　14．$8\sqrt{3}$　15．$\frac{1}{4}$　16．$a<2b$

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70.0 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.

(1)由 $3a_{n+1}-a_n=6$，所以 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2 \Rightarrow a_{n+1}-3=\frac{1}{3}(a_n-3)$，

$\because a_1=1$，所以 $a_1-3=-2$，$\therefore \{a_n-3\}$ 是以 -2 为首项，$\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列；…6 分

(2)由(1)知 $a_n-3=-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，$\therefore a_n=3-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，$\therefore S_n=3n-2\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=3n+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-3$ …12 分

18.

(1)证明：在图 1 中，因为 $AB=2BC=2CD$，且 D 为 AB 的中点，$\therefore \angle ACB=90°$

又 E 为 AC 的中点，所以 $DE \parallel BC$，在图 2 中，$CE\perp DE, PE\perp DE$，且 $CE\cap PE=E$

$\therefore DE\perp$ 平面 CEP，又 $PC\subset$ 平面 CEP，所以 $CP\perp DE$；　…6 分

(2) 设点 C 到平面 PBD 的距离为 h，由(1)知，$PE\perp$ 平面 $CDBE$，

ΔBCD 为等边三角形，$PD=1, BD=1, PB=\frac{\sqrt{10}}{2}$，取 PB 的中点 F，

连接 DF，则 $DF=\sqrt{PE^2+BE^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$，

$\because V_{C-PBD}=V_{P-BCD}$，即 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot h$，解得 $h=\frac{\sqrt{15}}{5}$

即点 C 到平面 PBD 的距离为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$．　…12 分

19.

记地球静止轨道卫星为：$1,2,3$，记倾斜地球同步轨道卫星为 a,b,c，则所有的选择为：

$(1,2),(1,3),(1,a),(1,b),(1,c)$，$(2,3),(2,a),(2,b),(2,c)$，$(3,a),(3,b),(3,c)$，$(a,b),(a,c),(b,c)$．

⑴记恰好选择了地球静止轨道卫星和倾斜地球同步轨道卫星各一颗为事件 A，则 A 包含

$(1,a),(1,b),(1,c)$，$(2,a),(2,b),(2,c)$，$(3,a),(3,b),(3,c)$，所以 $P(A)=\frac{3}{5}$； …8 分

⑵记至少选择一颗倾斜地球同步轨道卫星为事件 B，则 B 包含 $(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)$，

$(3,a),(3,b),(3,c)$，$(a,b),(a,c),(b,c)$. 所以 $P(B)=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$ …12 分

20.

⑴ ΔAF_1F_2 中由面积公式得 $a\cdot\sqrt{3}=b\cdot 2c$，即 $\sqrt{3}a=2\sqrt{a^2-1}$，得 $a^2=4$，

椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$； …4 分

⑵假设存在点 R 使得 $\angle ORP+\angle ORQ=\frac{\pi}{2}$，设 $R(0,m)$，

$\because \angle ORP+\angle ORQ=\frac{\pi}{2}$，$\therefore \angle ORQ=\angle OPR$，即 $\tan\angle ORQ=\tan\angle OPR$，

$\therefore \frac{|OQ|}{|OR|}=\frac{|OR|}{|OP|}$，即 $|OR|^2=|OP||OQ|$，

直线 $x=x_0$ 与椭圆 C_1 交于不同的两点 C,D，易知 C,D 关于 x 对称，

设 $C(x_0,y_0)$，则 $D(x_0,-y_0)$（$y_0\neq\pm1,y_0\neq0$），

由⑴知 $A(0,1)$，直线 AC 的方程是 $y=\frac{y_0-1}{x_0}x+1$，令 $y=0$ 得 $x_P=-\frac{x_0}{y_0-1}$，

直线 AD 方程是 $y=\frac{y_0+1}{-x_0}x+1$，令 $y=0$ 得 $x_Q=\frac{x_0}{y_0+1}$，

由 $|OR|^2=|OP||OQ|$，得 $m^2=\frac{x_0^2}{|y_0^2-1|}$，又 $C(x_0,y_0)$ 在椭圆上，所以 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，

$\therefore m^2=4$，即 $m=\pm2$

所以存在点 $R(0,\pm2)$，使得 $\angle ORP+\angle ORQ=\frac{\pi}{2}$ 成立. …12 分

21.

⑴由题可知 $\varphi(x)=-3\ln x+\frac{1}{2}x^2-2x+1$，定义域为 $(0,+\infty)$

则 $\varphi'(x)=\frac{(x-3)(x+1)}{x}$，令 $\varphi'(x)=0$，解得 $x=-1$（舍）或 $x=3$，

故可得 $\varphi(x)$ 在 $(0,3)$ 单调递减，在 $(3,+\infty)$ 上单调递增. …4 分

(2)易知 $h(x)=a\ln x-\dfrac{1}{2}x^2+2x-1$，则 $h'(x)=\dfrac{-x^2+2x+a}{x}$，

令 $y=-x^2+2x+a$，则其 $\Delta=4+4a$

①当 $a\le -1$ 时，$\Delta\le 0$，$h'(x)\le 0$，故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

又∵ $h(1)=\dfrac{1}{2}>0,h(3)=\dfrac{1}{2}+a\ln 3<0$，故 $h(x)$ 在区间 $(1,3)$ 上一定有一个零点

②当 $-1<a<0$ 时，$\Delta>0$，令 $y=-x^2+2x+a=0$，解得 $x_1=1-\sqrt{a+1},x_2=1+\sqrt{a+1}$

令 $h'(x)>0$，故可得 $x\in(x_1,x_2)$，故 $h(x)$ 在区间 (x_1,x_2) 上单调递增

令 $h'(x)<0$，故可得 $x\in(0,x_1)$ 或 $(x_2,+\infty)$，故 $h(x)$ 在 $(0,x_1)$，$(x_2,+\infty)$ 单调递减

$x_2=1+\sqrt{a+1}\in(1,2)$，$h(2)=a\ln 2+1>1-\ln 2>0,h(4)=a\ln 4-1<-1$，

故 $h(x)$ 在区间 $(2,4)$ 上一定有一个零点

③当 $a=0$ 时，$h(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2x-1$，令 $h(x)=0$，解得 $x=2\pm\sqrt{2}$，显然 $h(x)$ 存在零点

④当 $a>0$ 时，令 $h'(x)=0$，解得 $x=1+\sqrt{a+1}\in(2,+\infty)$

故可得 $h(x)$ 在区间 $\left(0,1+\sqrt{a+1}\right)$ 单调递增；在 $\left(1+\sqrt{a+1},+\infty\right)$ 单调递减

又因为 $h\left(\dfrac{1}{4}\right)=-a\ln 4-\dfrac{17}{32}<0,h(1)=\dfrac{1}{2}>0$，故 $h(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{4},1\right)$ 上一定存在一个零点

综上所述，对任意的 $a\in\mathbf{R}$，$h(x)$ 一定存在零点. …12 分

22.

(1)直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=a+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}t\\ y=1-\dfrac{\sqrt{5}}{5}t\end{cases}$（$t$ 为参数），

消去参数 t 得直线 l 的普通方程为 $x+2y-a-2=0$.

由 $\rho^2=x^2+y^2,\rho\cos\theta=x,\rho\sin\theta=y$，

得曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x=0$，即 $(x-1)^2+y^2=1$，

因为圆 C 关于直线 l 对称，所以圆心 $(1,0)$ 在直线 $x+2y-a-2=0$ 上，所以 $a=-1$；…5 分

(2)由点 A,B 在圆 $\rho=2\cos\theta$ 上，且 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$，不妨设 $\angle AOx=\alpha$，则 $\angle BOx=\alpha-\dfrac{\pi}{3}$，

∴ ΔAOB 的面积为 $S=\frac{1}{2}|OA||OB|\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}|2\cos\alpha|\left|2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\right]\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$，

∴ ΔAOB 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.　　　　…10 分

23.

⑴由题意知 $f(x)=\begin{cases}-3x, x<-\frac{1}{2}\\ 1-x, -\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{4}\\ 3x, x\ge\frac{1}{4}\end{cases}$，令 $f(x)=2$，得 $x=\pm\frac{2}{3}$，

∴ $f(x)<2$ 的解集为 $\left\{x\middle|-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}\right\}$；　　　　…5 分

⑵由题意可知，$M=\frac{3}{4}$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，$a+b=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\ge4$，

当且仅当 $a=b=2$ 时等号成立.　　　　…10 分