

保密★启用前

2023 年高三一模考试

# 数学试题

2023.2

注意事项:

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
  2. 答题前，考生务必将姓名、考生号等个人信息填写在答题卡指定位置。
  3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
- 一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x | x^2 - x - 2 < 0\}$ ，则  $\complement_{\mathbb{R}} A =$

- A.  $\{x | -1 < x < 2\}$                       B.  $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$   
C.  $\{x | x < -1\} \cup \{x | x > 2\}$                       D.  $\{x | x \leq -1\} \cup \{x | x \geq 2\}$

2. 设  $z = i(2 - i)$ ，则  $\bar{z} =$

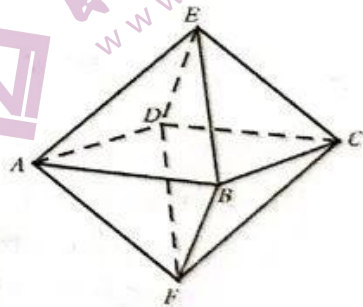
- A.  $1 + 2i$                       B.  $1 + 2i$                       C.  $1 - 2i$                       D.  $-1 - 2i$

3. 2020 年 12 月 17 日凌晨 1 时 59 分，嫦娥五号返回器携带月球样品成功着陆，这是我国首次实现了地外天体采样返回，标志着中国航天向前又迈出了一大步。月球距离地球约 38 万千米，有人说：在理想状态下，若将一张厚度约为 0.1 毫米的纸对折  $n$  次其厚度就可以超过地球到达月球的距离，那么至少对折的次数  $n$  为 ( $\lg 2 = 0.3$ ,  $\lg 3.8 = 0.6$ )

- A. 40                      B. 41                      C. 42                      D. 43

4. 如图，八面体的每一个面都是正三角形，并且  $A, B, C, D$  四个顶点在同一平面内，下列结论：①  $AE \parallel$  平面  $CDF$ ；② 平面  $ABE \parallel$  平面  $CDF$ ；③  $AB \perp AD$ ；④ 平面  $ACE \perp$  平面  $BDF$ ，正确命题的个数为

- A. 1                      B. 2  
C. 3                      D. 4



5. 过抛物线  $C: y = 4x^2$  焦点  $F$  作倾斜角为  $30^\circ$  的直线交抛物线于  $A, B$ ，则  $|AB| =$

- A.  $\frac{1}{3}$                       B.  $\frac{2}{3}$                       C. 1                      D. 16

6. 为了迎接“第 32 届菏泽国际牡丹文化旅游节”，某宣传团体的六名工作人员需要制作宣传海报，每人承担一项工作，现需要一名总负责，两名美工，三名文案，但甲，乙不参与美工，丙不能书写文案，则不同的分工方法种数为

- A. 9 种                      B. 11 种                      C. 15 种

高三数学试题 第 1 页 (共 4 页)

7. 设实数  $x, y$  满足  $x+y=1, y>0, x \neq 0$ , 则  $\frac{2}{|x|} + \frac{|x|}{y}$  的最小值为

- A.  $2\sqrt{2}-2$       B.  $2\sqrt{2}+2$       C.  $\sqrt{2}-1$       D.  $\sqrt{2}+1$

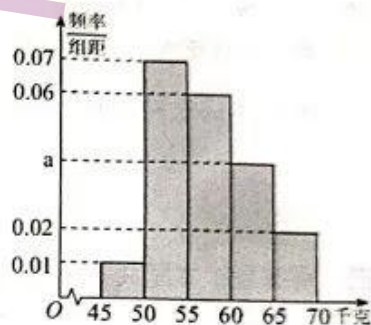
8. 定义在实数集  $R$  上的函数  $y=f(x)$ , 如果  $\exists x_0 \in R$ , 使得  $f(x_0)=x_0$ , 则称  $x_0$  为函数  $f(x)$  的不动点. 给定函数  $f(x)=\cos x, g(x)=\sin x$ , 已知函数  $f(x), f(g(x)), g(f(x))$  在  $(0,1)$  上均存在唯一不动点, 分别记为  $x_1, x_2, x_3$ , 则

- A.  $x_3 > x_1 > x_2$       B.  $x_2 > x_1 > x_3$       C.  $x_2 > x_3 > x_1$       D.  $x_3 > x_2 > x_1$

二、选择题: 共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 为了解学生的身体状况, 某校随机抽取了 100 名学生测量体重, 经统计, 这些学生的体重数据 (单位: 千克) 全部介于 45 至 70 之间, 将数据整理得到如图所示的频率分布直方图, 则下列命题正确的有

- A. 频率分布直方图中  $a$  的值为 0.04  
B. 这 100 名学生中体重不低于 60 千克的人数为 20  
C. 这 100 名学生体重的众数约为 52.5  
D. 据此可以估计该校学生体重的 75% 分位数约为 61.25



10. 已知圆  $O: x^2 + y^2 = 4$ , 下列说法正确的有

- A. 对于  $\forall m \in R$ , 直线  $(2m+1)x + (m+1)y - 7m - 4 = 0$  与圆  $O$  都有两个公共点  
B. 圆  $O$  与动圆  $C: (x-k)^2 + (y-\sqrt{3}k)^2 = 4$  有四条公切线的充要条件是  $|k| > 2$   
C. 过直线  $x+y-4=0$  上任意一点  $P$  作圆  $O$  的两条切线  $PA, PB$  ( $A, B$  为切点), 则四边形  $PAOB$  的面积的最小值为 4  
D. 圆  $O$  上存在三点到直线  $x+y-2=0$  距离均为 1

11. 已知函数  $f_n(x) = \sin^n x + \cos^n x$  ( $n \in N^*$ ), 下列命题正确的有

- A.  $f_1(2x)$  在区间  $[0, \pi]$  上有 3 个零点  
B. 要得到  $f_1(2x)$  的图象, 可将函数  $y = \sqrt{2} \cos 2x$  图象上的所有点向右平移  $\frac{\pi}{8}$  个单位长度  
C.  $f_2(x)$  的周期为  $\frac{\pi}{2}$ , 最大值为 1  
D.  $f_3(x)$  的值域为  $[-2, 2]$

12. 已知双曲线  $E: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过点  $C\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  的直线  $l$  与双曲线

$E$  的左、右两支分别交于  $P, Q$  两点, 下列命题正确的有

- A. 当点  $C$  为线段  $PQ$  的中点时, 直线  $l$  的斜率为  $\sqrt{3}$   
B. 若  $A(-1, 0)$ , 则  $\angle QF_2A = 2\angle QAF_2$   
C.  $|PF_1| \cdot |PF_2| = |PO|^2$   
D. 若直线  $l$  的斜率为  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ , 且  $B(0, \sqrt{3})$ , 则  $|PF_1| + |QF_1| = |PB| + |QB|$

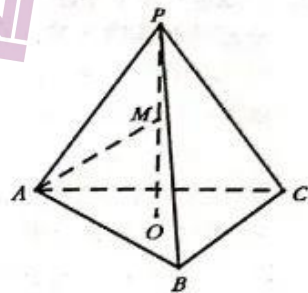
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知夹角为  $60^\circ$  的非零向量  $a, b$  满足  $|a| = 2|b|$ ,  $(2a - tb) \perp b$ , 则  $t =$  \_\_\_\_\_.

14. 定义在  $R$  上的函数  $f(x)$ ,  $g(x)$ , 满足  $f(2x+3)$  为偶函数,  $g(x+5)-1$  为奇函数, 若  $f(1)+g(1)=3$ , 则  $f(5)-g(9)=$  \_\_\_\_\_.

15. 设  $x, y$  均为非零实数, 且满足  $\frac{x \sin \frac{\pi}{5} + y \cos \frac{\pi}{5}}{x \cos \frac{\pi}{5} - y \sin \frac{\pi}{5}} = \tan \frac{9\pi}{20}$ , 则  $\frac{y}{x} =$  \_\_\_\_\_.

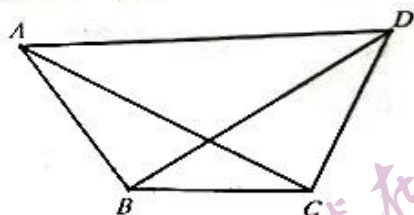
16. 正三棱锥  $P-ABC$  的高为  $PO$ ,  $M$  为  $PO$  中点, 过  $AM$  作与棱  $BC$  平行的平面, 将三棱锥分为上下两部分, 设上、下两部分的体积分别为  $V_1, V_2$ , 则  $\frac{V_1}{V_2} =$  \_\_\_\_\_.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 如图, 在平面四边形  $ABCD$  中,  $\angle ABC = \theta (0 < \theta < \pi)$ ,  $AB = BC = CD = 1$ ,  $AC \perp CD$ .

- (1) 试用  $\theta$  表示  $BD$  的长;
- (2) 求  $AC^2 + BD^2$  的最大值.



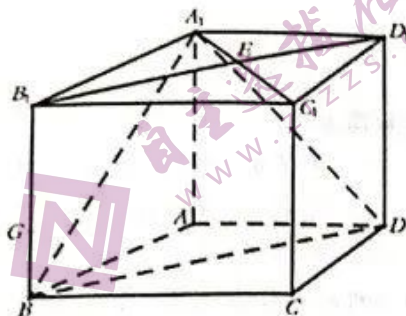
18. (12 分) 为了促进学生德、智、体、美、劳全面发展, 某校成立了生物科技小组, 在同一块试验田内交替种植  $A, B, C$  三种农作物 (该试验田每次只能种植一种农作物), 为了保持土壤肥度, 每种农作物都不连续种植, 共种植三次. 在每次种植  $A$  后会有  $\frac{1}{3}$  的可能性种植  $B$ ,  $\frac{2}{3}$  的可能性种植  $C$ ; 在每次种植  $B$  的前提下再种植  $A$  的概率为  $\frac{1}{4}$ , 种植  $C$  的概率为  $\frac{3}{4}$ , 在每次种植  $C$  的前提下再种植  $A$  的概率为  $\frac{2}{5}$ , 种植  $B$  的概率为  $\frac{3}{5}$ .

- (1) 在第一次种植  $B$  的前提下, 求第三次种植  $A$  的概率;
- (2) 在第一次种植  $A$  的前提下, 求种植  $A$  作物次数  $X$  的分布列及期望;

19. (12分) 如图, 直四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $AD \perp CD, AD \parallel BC, AD = CD = 2, BC = 3,$

$A_1C_1$  与  $B_1D_1$  交于  $E, G$  为棱  $BB_1$  上一点, 且  $BB_1 = 3BG$ , 点  $C_1$  到平面  $A_1BD$  的距离为  $\frac{10\sqrt{17}}{17}$ .

- (1) 判断  $AG$  是否在平面  $AED_1$  内, 并说明理由;  
(2) 求平面  $AD_1E$  与平面  $AA_1D_1$  所成角的余弦值.



20. (12分) 已知首项不为 0 的等差数列  $\{a_n\}$ , 公差  $d \neq 0, a_t = 0$  ( $t$  为给定常数),  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  前  $n$  项和, 且  $S_m = S_n$  ( $m < n$ ),  $\{b_n\}$  为  $m_2 - m_1$  所有可能取值由小到大组成的数列.

(1) 求  $b_n$ ;

(2) 设  $c_n = (-1)^n \frac{2n+1}{(b_{2n}+1)(b_{2n}+1)}$ ,  $T_n$  为数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和, 证明:  $T_{2n} \leq -\frac{1}{6}$ .

21. (12分) 已知函数  $f(x) = mx^2 - x^3 - 2$ .

(1) 若函数  $f(x)$  在  $R$  上单调递增, 求  $m$  的取值范围;

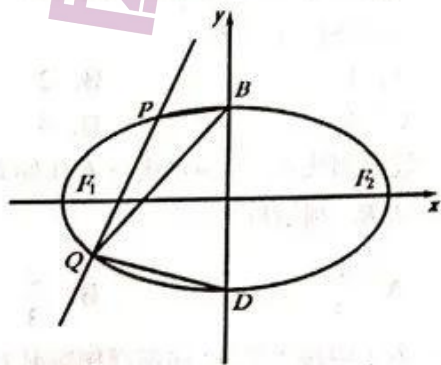
(2) 若  $m < 0$ , 且  $f(x)$  有两个零点  $x_1, x_2$ , 证明:  $|x_1 - x_2| < 3 + \frac{m}{3}$ .

22. (12分) 如图, 椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的焦点分别为  $F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0)$ ,  $A$

为椭圆  $C$  上一点,  $\triangle F_1AF_2$  的面积最大值为  $\sqrt{3}$ .

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 若  $B, D$  分别为椭圆  $C$  的上、下顶点, 不垂直坐标轴的直线  $l$  交椭圆  $C$  于  $P, Q$  ( $P$  在上方,  $Q$  在下方, 且均不与  $B, D$  点重合) 两点, 直线  $PB, QD$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ , 且  $k_2 = -3k_1$ , 求  $\triangle PBQ$  面积的最大值.



## 2023.02 高三一模数学参考答案

一 单选

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	D	D	A	C	A	C

二 多选

题号	9	10	11	12
答案	ACD	BC	BC	BCD

三 填空

13. 2    14. 1    15. 1    16.  $\frac{4}{21}$

四 解答题

17.解：因为  $\angle ABC = \theta$  ( $0 < \theta < \pi$ )， $AB = BC = CD = 1$ ， $AC \perp CD$ ，

所以  $\angle BCA = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ ， $\angle BCD = \frac{\pi}{2} + \angle BCA = \frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}) = \pi - \frac{\theta}{2}$ ，

在  $\triangle BCD$  中， $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos \angle 1$ ，-----4 分

(1) 所以  $BD = \sqrt{2 + 2\cos\frac{\theta}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{4}$ ；-----5 分

(2) 在  $\triangle ABC$  中， $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC = 2 - 2\cos\theta$ ，-----7 分

$AC^2 + BD^2 = 2 - 2\cos\theta + 2 + 2\cos\frac{\theta}{2} = -4\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\cos\frac{\theta}{2} + 6$ ，

因为  $0 < \theta < \pi$ ，所以  $0 < \cos\frac{\theta}{2} < 1$ ，当  $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{4}$  时，取到最大值  $\frac{25}{4}$ 。

故  $AC^2 + BD^2$  的最大值是  $\frac{25}{4}$ 。-----10 分

18. 解: 设  $A_i, B_i, C_i$  表示第  $i$  次种植作物  $A, B, C$  的事件, 其中  $i=1, 2, 3$ .

(1) 在第一次种植  $B$  的情况下, 第三次种植  $A$  的概率为

$$P(A_3) = P(C_2 | B_1)P(A_3 | C_2) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{10}; \text{-----4分}$$

(2) 由已知条件, 在第 1 次种植  $A$  的前提下:

$$P(B_2) = \frac{1}{3}, \quad P(A_3 | B_2) = \frac{1}{4}, \quad P(C_3 | B_2) = \frac{3}{4},$$

$$P(C_2) = \frac{2}{3}, \quad P(A_3 | C_2) = \frac{2}{5}, \quad P(B_3 | C_2) = \frac{3}{5},$$

因为第一次必种植  $A$ , 则随机变量  $X$  的可能取值为 1, 2, -----6分

$$P(X=1) = P(C_2 B_3) + P(B_2 C_3) = P(B_3 | C_2) \cdot P(C_2) + P(C_3 | B_2) \cdot P(B_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{13}{20},$$

-----8分

$$P(X=2) = P(C_2 A_3) + P(B_2 A_3) = P(A_3 | C_2) \cdot P(C_2) + P(A_3 | B_2) \cdot P(B_2) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{20},$$

-----10分

所以  $X$  的分布列为:

$X$	1	2
$P$	$\frac{13}{20}$	$\frac{7}{20}$

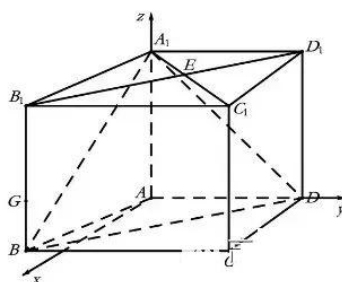
$$E(X) = 1 \times \frac{13}{20} + 2 \times \frac{7}{20} = \frac{27}{20}. \text{-----12分}$$

19. 解以  $A$  为坐标原点, 过  $A$  作与  $AD$  垂直的直线为  $x$

轴,  $AD, AA_1$  所在的直线分别为  $y$  轴,  $z$  轴, 建立如图

所示的空间直角坐标系, 设直四棱锥的高为  $m$ , 则

$$D(0, 2, 0), B(2, -1, 0), C_1(2, 2, m), A_1(0, 0, m),$$



$$\overrightarrow{A_1B} = (2, -1, m), \quad \overrightarrow{A_1C_1} = (2, 2, 0), \quad \overrightarrow{A_1D} = (0, 2, -m),$$

设平面  $A_1BD$  的一个法向量为  $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{A_1D} = 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2x_1 - y_1 - mz_1 = 0 \\ 2y_1 - mz_1 = 0 \end{cases} \quad \text{取} \quad \vec{n}_1 = (3m, 2m, 4) \quad \text{-----2分}$$

$$\text{所以点 } C_1 \text{ 到平面 } A_1BD \text{ 的距离为 } d = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{A_1C_1}|}{|\vec{n}_1|} = \frac{|6m + 4m|}{\sqrt{9m^2 + 4m^2 + 16}} = \frac{10|m|}{\sqrt{13m^2 + 16}}$$

$$\text{令 } \frac{10|m|}{\sqrt{13m^2 + 16}} = \frac{10\sqrt{17}}{17} \quad \text{解得 } m = 2 \quad \text{-----4分}$$

(1) 设平面  $AB_1D_1$  的一个法向量为  $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ,

$$\text{由 } \overrightarrow{AB_1} = (2, -1, 2), \quad \overrightarrow{AD_1} = (0, 2, 2),$$

$$\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{AD_1} = 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2x_2 - y_2 + 2z_2 = 0 \\ 2y_2 + 2z_2 = 0 \end{cases}, \quad \text{取} \quad \vec{n}_2 = (-3, -2, 2),$$

$$\text{而 } \overrightarrow{AG} = \left(2, -1, \frac{2}{3}\right), \quad \text{所以 } \overrightarrow{AG} \cdot \vec{n}_2 = 2 \times (-3) + (-1) \times (-2) + \frac{2}{3} \times 2 = -\frac{20}{3} \neq 0,$$

又  $AB_1$  与  $AE, AD_1$  共面, 故直线  $AG$  不在平面  $AB_1D_1$  内. -----7分

说明: 能判定正确的得一分, 用不同的方法说明理由, 只要正确, 该问即可满分.

(2) 依 (1) 知平面  $AED_1$  的一个法向量为  $\vec{n}_2 = (-3, -2, 2)$ ,

易知平面  $AA_1D_1$  的一个法向量为  $\vec{n}_3 = (1, 0, 0)$ ,

设二面角  $E-AD_1-A_1$  的平面角为  $\alpha$ ,

$$\text{则 } \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{3}{\sqrt{9+4+4} \times 1} = \frac{3\sqrt{17}}{17}, \quad \text{故二面角 } E-AD_1-A_1 \text{ 的余弦值 } \frac{3\sqrt{17}}{17}$$

-----12分

20. 解 (1) 由题意得,  $a_t = a_1 + (t-1)d = 0$ , 得  $a_1 = (1-t)d$ , ①,

由  $S_{m_1} = S_{m_2}$  ( $m_1 < m_2$ ), 得  $m_1 a + \frac{m_1(m_1-1)}{2}d = m_2 a + \frac{m_2(m_2-1)}{2}d$ , ②,

由①②, 可得  $m_1 + m_2 = 2t - 1$ , 且  $2m_1 < m_1 + m_2 = 2t - 1$ , 所以  $1 \leq m_1 \leq t - 1$ , -----3分

由  $m_2 - m_1 = -2m_1 + 2t - 1$ , 当  $m_1$  在  $1 \leq m_1 \leq t - 1$  范围内取值时,  $m_2 - m_1$  的所有取值为:

$2t - 3, 2t - 5, \dots, 5, 3, 1$ . 所以  $b_n = 2n - 1$  ( $1 \leq n \leq t - 1$ ); -----6分

(说明: 直接写出: 由题意得  $b_n = 2n - 1$ , 或由题意得  $b_n = 2n - 1$ , 或由题意得  $m_2 - m_1$  得  $m_2 - m_1$  的所有取值为:  $1, 3, 5, 7, \dots$  得以  $b_n = 2n - 1$  的给 2 分.)

(2)  $c_n = (-1)^n \frac{2n+1}{(b_{n+1}+1)(b_n+1)} = (-1)^n \frac{2n+1}{4(n+1)n} = (-1)^n \frac{1}{4} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$ , -----8分

所以  $T_n = \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2n+1} - 1 \right)$ , -----10分

由于  $T_n = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2n+1} - 1 \right)$  ( $1 \leq n \leq t - 1$ ) 是递减的, 所  $T_{t-1} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2t} - 1 \right) = -\frac{1}{6}$ . -----12分

21. 解: (1) 函数  $f(x)$  在  $R$  上单调递增, 因此  $f'(x) = me^x - 2x - 1 \geq 0$ ,  $m \geq \frac{2x+1}{e^x}$ ,

记  $g(x) = \frac{2x+1}{e^x}$ , 则  $g'(x) = \frac{1-2x}{e^x} = 0$ , 得  $x = \frac{1}{2}$ . 当  $x < \frac{1}{2}$  时, 函数  $g(x)$  单调递增;

当  $x > \frac{1}{2}$  时, 函数单调递减, 所以  $g(x)$  在  $x = \frac{1}{2}$  处取最大值  $2e^{-\frac{1}{2}}$ , 因此  $m \geq 2e^{-\frac{1}{2}}$ ;

-----4分



(2) 不妨设  $x_1 < x_2$ , 由  $me^{x_1} - x_1^2 - x_1 + 2 = 0$ ,  $me^{x_2} - x_2^2 - x_2 + 2 = 0$ , 即  $x_1, x_2$  为方程  $m = \frac{x^2 + x - 2}{e^x}$  的两根, 由  $m < 0$ , 所以  $x_1, x_2 \in (-2, 1)$ ,

记  $h(x) = \frac{x^2 + x - 2}{e^x}$  ( $-2 < x < 1$ ), 则  $h'(x) = \frac{-x^2 + x + 3}{e^x} = 0$ , 得  $x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$ ,

$h(x)$  在  $\left(-2, \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right)$  上单调递减, 在  $\left(\frac{1 - \sqrt{13}}{2}, 1\right)$  上单调递增, -----6分

$h(x)$  在  $x = -2$  处的切线方程为  $y = -3e^2(x + 2)$ ,

记  $h_1(x) = -3e^2(x + 2)$  ( $-2 < x < 1$ ), 则  $h_1(x)$  单调递减,

则  $h(x) - h_1(x) = \frac{x^2 + x - 2}{e^x} + 3e^2(x + 2) = e^{-x}(x + 2)(3e^{x+2} + x - 1) > 0$ , 即  $h(x) > h_1(x)$ ,

$h(x)$  过  $(1, 0)$  处的切线方程为  $y = e(x - 1)$ , 记  $h_2(x) = e(x - 1)$  ( $-2 < x < 1$ ), 则  $h_2(x)$  单调递增;

又  $h(x) - h_2(x) = \frac{x^2 + x - 2}{e^x} - e(x - 1) = e^{-x}(1 - x)(e^{x+1} - x - 2) \geq 0$ , 即  $h(x) > h_2(x)$ ,

-----9分

记  $y = m$  与  $y = h_1(x)$  和  $y = h_2(x)$  的交点横坐标分别为  $x_3, x_4$ , 则

$h(x_1) = m = h_1(x_3)$ ,  $x_3 = -2 - \frac{m}{3e^2}$ , 由  $h(x_1) > h_1(x_1)$ ,  $h_1(x)$  单调递减, 所以  $x_1 > x_3$ ,

$h(x_2) = m = h_2(x_4)$ ,  $x_4 = 1 + \frac{m}{e}$ , 由  $h(x_2) > h_2(x_2)$ ,  $h_2(x)$  单调递增, 所以  $x_2 < x_4$ ,

$|x_1 - x_2| = x_2 - x_1 < x_4 - x_3 = 3 + \frac{m}{e} + \frac{m}{3e^2} = 3 + m\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{3e^2}\right) < 3 + m\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{27}\right) < 3 + \frac{m}{3}$ .

-----12分

22. 解: (1)  $S_{\Delta F_1 A F_2} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot b = \sqrt{3}$   $\therefore b = 1$   $a = \sqrt{b^2 + 3} = 2$ ,

故椭圆的方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ; -----3分

(2) 依题意设直线  $PQ$  的方程为  $y = kx + m$ ,  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ,

$$\text{联立方程组} \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{消元得: } (1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{8km}{1 + 4k^2}, x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 4}{1 + 4k^2},$$

$$\Delta = 64k^2 m^2 - 4(1 + 4k^2)(4m^2 - 4) = 16(1 + 4k^2 - m^2) > 0, \text{-----4分}$$

$$\text{由 } k_2 = -3k_1 \text{ 得: } \frac{y_2 + 1}{x_2} = -3 \cdot \frac{y_1 - 1}{x_1},$$

$$\text{两边同乘 } x_1, \frac{y_2 + 1}{x_1 x_2} = -3 \cdot \frac{y_1 - 1}{x_1^2} = -3 \cdot \frac{y_1 - 1}{4(1 - y_1^2)} = \frac{3}{4(1 + y_1)},$$

$$\text{即 } 3x_1 x_2 - 4(1 + y_1)(1 + y_2) = 0; \text{-----6分}$$

将  $y_1 = kx_1 + m, y_2 = kx_2 + m$  代入上式得:

$$\begin{aligned} 3x_1 x_2 - 4(1 + y_1)(1 + y_2) &= 3x_1 x_2 - 4(kx_1 + m + 1) \\ &= (3 - 4k^2)x_1 x_2 - 4k(m + 1)(x_1 + x_2) - 4(m + 1)^2 \\ &= (3 - 4k^2) \frac{4m^2 - 4}{1 + 4k^2} - 4k(m + 1) \left( -\frac{8km}{1 + 4k^2} \right) - 4(m + 1)^2 = 0, \end{aligned}$$

整理得:  $m^2 - m - 2 = 0$  所以  $m = 2$  或  $m = -1$  (舍), -----8分

$$\begin{aligned} S_{\Delta PQB} &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot |x_1 - x_2| = \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \frac{1}{2} \sqrt{\left( -\frac{8km}{1 + 4k^2} \right)^2 - 4 \frac{4m^2 - 4}{1 + 4k^2}} \\ &= \frac{2\sqrt{4k^2 - 3}}{1 + 4k^2} \text{-----10分} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4k^2-3} + \frac{4}{\sqrt{4k^2-3}}} \leq \frac{1}{2},$$

当  $k = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$  时等号成立，满足条件，所以  $\triangle PQB$  面积的最大值为  $\frac{\sqrt{7}}{2}$ 。-----12分

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线