秘密★启用前

文科数学试卷

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.

2. 每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 在试题卷上作答无效. 微信搜《高三答案公众号》

3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回. 满分150分，考试用时120分钟.

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知复数 $z=\dfrac{1+3i}{i}$，则 $|z|$ 为

A. 2　　B. 4　　C. $\sqrt{10}$　　D. 10

2. 已知集合 $A=\{x|y=\log_2(3-x)+2\}$，集合 $B=\{y|y=2^x\}$，则 $A\cap \complement_{\mathbf{R}}B=$

A. $(-\infty,0]$　　B. $(-\infty,3)$

C. $(0,3)$　　D. $(3,+\infty)$

3. 袁隆平院士是中国杂交水稻事业的开创者，是当代神农. 50多年来，他始终在农业科学的第一线辛勤耕耘、不懈探索，为人类运用科技手段战胜饥饿带来了绿色的希望和金色的收获. 袁老的科研团队在发现"野败"后，将其带回实验，设计了试验田一、二. 通过随机抽样法在两块试验田中分别抽取20株水稻，并统计每株水稻的稻穗数（单位：颗）得到如图1所示的茎叶图，则下列说法错误的是

试验田一		试验田二
7 3 2	20	
8 5 5 5 2 1	21	0 1
3	22	4
	23	5 7
8 2	24	1 2 4 4 4 8
1	25	2 3 5 9
9	26	0 3 8
4 5	27	2
0 9 3	28	
1	29	3

图1

A. 试验田二的中位数是246

B. 试验田一的标准差小于试验田二的标准差

C. 试验田一的平均数 $\overline{x_1}$ 小于试验田二的平均数 $\overline{x_2}$

D. 试验田一的众数是215

4. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，且满足 $S_{11}=33$，$a_7=4$，则 $a_1=$

A. -3　　B. -2

C. 0　　D. 1

5. 已知 M，N 分别是线段 OA，OB 上的点，且 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{ON}=2\overrightarrow{NB}$，若 $\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，则 $\lambda+\mu=$

A. 1　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{1}{6}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

6. 某三棱锥的三视图如图 2，是三个边长为 2 的正方形，则该三棱锥的外接球的体积为

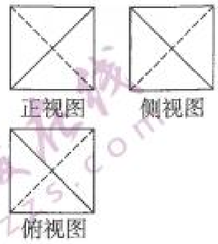

图 2

A. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

B. $\frac{13}{3}\pi$

C. $4\sqrt{3}\pi$

D. 6π

7. 已知曲线 $y=a^x$ 和 $y=\log_a x$ 与直线 $y=x$ 相切于同一点 P，则大于 1 的 a 的值为(下列 e=2.71828…是自然对数的底数)

A. e^2　　B. $e^{\frac{1}{2}}$　　C. e^e　　D. $e^{\frac{1}{e}}$

8. 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$F_1$、$F_2$ 分别为椭圆的左、右焦点，若椭圆上存在一点 P，使得$|PF_1|-|PF_2|=2b$，则该椭圆离心率的取值范围为

A. $\left(0,\ \frac{1}{2}\right]$　　B. $\left[\frac{1}{2},\ 1\right)$　　C. $\left(0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　D. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1\right)$

9. 已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}+(e-k)x(x>1)$有且只有一个零点，则 k 的值为

A. $\frac{1}{e}+2e$　　B. $\frac{1}{2e}+e$　　C. $\frac{1}{e}+e^2$　　D. $\frac{1}{e^2}+e$

10. 哥德巴赫猜想是“每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数（素数指大于 1 的自然数中，除了 1 和它本身以外不再有其他因数的自然数）的和”，如 18=7+11，在不超过 16 的素数中，随机选取两个不同的数，其和等于 16 的概率是

A. $\frac{4}{15}$　　B. $\frac{2}{15}$　　C. $\frac{3}{10}$　　D. $\frac{1}{10}$

11. 双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$，$O$ 是坐标原点，F 是双曲线 C 的右焦点，离心率是 e，已知 A 是双曲线 C 的斜率为正的渐近线与直线 $x=\frac{a^2}{c}$的交点，则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AF}$的值为

A. 0　　B. $-e$　　C. 2　　D. $\frac{1}{e}$

12. 如图 3，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，若线段 A_1D 上存在一点 E，使 $AE+B_1E$ 取得最小值，则此最小值是

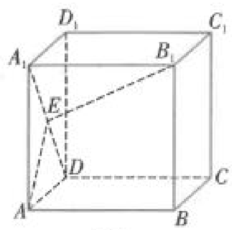

图 3

A. 4

B. $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

C. $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

D. $8+4\sqrt{2}$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y\geq4,\\ x-y\leq1,\end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最小值为________.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_n=2na_n-1$，则 $a_4=$________.

15. 已知圆 O：$x^2+y^2=4$，以 $A(1,\sqrt{3})$ 为切点作圆 O 的切线 l_1，点 B 是直线 l_1 上异于点 A 的一个动点，过点 B 作直线 l_1 的垂线 l_2，若 l_2 与圆 O 交于 D，E 两点，则 $\triangle AED$ 面积的最大值为__________.

16. 设函数 $f(x)=x^2+\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+1$，$\forall x_1$，$x_2\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，有下列条件：

①$x_1>x_2$；②$x_1^2>x_2^2$；③$|x_1|>x_2$；④$x_1>|x_2|$.

其中能使 $f(x_1)>f(x_2)$ 恒成立的条件的序号是__________.

三、解答题（共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）

椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率是 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且点 $A(2,1)$ 在椭圆 C 上，O 是坐标原点.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）直线 l 过原点，且 $l\perp OA$，若 l 与椭圆 C 交于 B，D 两点，求弦 BD 的长度.

18.（本小题满分 12 分）

$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 2.

（1）若 $b=2$ 且 $b-c=2a\cos B$，求角 A；

（2）若 $A=\theta$，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值（结果用 θ 表示）.

19.（本小题满分 12 分）

如图 4，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$，$AB=4$，$AD=1$，$M$ 是 AB 的中点，$AD\perp PD$.

（1）证明：平面 $PDM\perp$ 平面 PBC；

（2）求 PC 的中点 N 到平面 PDM 的距离.

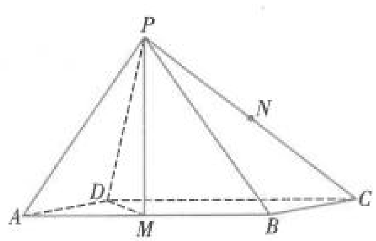

图 4

20.（本小题满分 12 分）

我国是世界上严重缺水的国家，某市为了制定合理的节水方案，对居民用水情况进行了调查. 通过抽样调查，获得了某年该市 100 位居民的月均用水量（单位：吨）. 将数据按照 $[0,\ 0.5)$，$[0.5,\ 1)$，…，$[4,\ 4.5]$ 分成 9 组，制成了如图 5 所示的频率分布直方图.

（1）求直方图中 a 的值；假设该市有 10 万居民，估计全市居民中月均用水量不低于 2.5 吨的人数；

（2）估计该市居民月均用水量的平均数.（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）

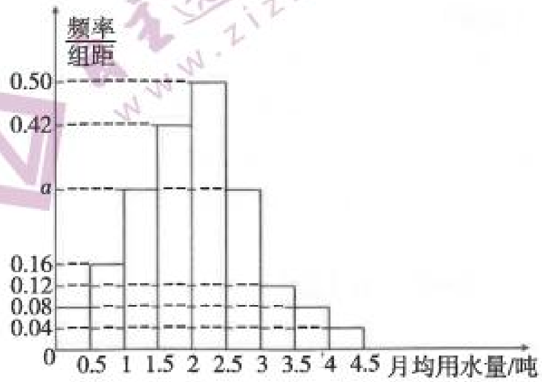

图 5

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$，若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,\ f(0))$ 处的切线方程为 $y=1$.

（1）设函数 $f(x)$ 的极大值和极小值分别为 M 和 m，当 $b=1$ 时，求 $M+m$；

（2）若过该曲线外一点 $(0,\ 2)$ 恰好能作该曲线的两条切线，求实数 b 的值.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，并用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑. 注意所做题目的题号必须与所涂题目的题号一致，在答题卡选答区域指定位置答题. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）【选修 4-4：坐标系与参数方程】微信搜《高三答案公众号》

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{4t^2}{1+2t^2+t^4}, \end{cases}$（$t$ 为参数）. 以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $m\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta-1=0$（$m$ 为参数）.

（1）求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程；

（2）直线 l 过定点 P，Q 为曲线 C 上的点，求 $|PQ|$ 的最小值.

23.（本小题满分 10 分）【选修 4-5：不等式选讲】

已知函数 $f(x)=|x^2-3x|+|x|$.

（1）求不等式 $f(x)\geq 3$ 的解集；

（2）若 $f(x)=|x^2-2x|$，求 x 的取值范围.

文科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	B	B	C	C	D	D	B	B	A	C

【解析】

1．$z=3-\mathrm{i}$，$|z|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$，故选 C.

2．因为 $A=\{x\,|\,y=\log_2(3-x)+2\}=(-\infty,\ 3)$，$B=\{y\,|\,y=2^x\}=(0,\ +\infty)$，则 $\complement_{\mathbf{R}}B=(-\infty,\ 0]$，所以 $A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=(-\infty,\ 0]$，故选 A.

3．根据茎叶图知试验田二稻穗数的中位数是 246，故 A 正确；试验田一数据的离散程度较大，所以试验田一稻穗数的标准差大于试验田二稻穗数的标准差，故 B 错误；试验田一的数据集中于区间(200，220)，而试验田二的数据集中于区间(240，260)，所以 $\overline{x_1}<\overline{x_2}$，故 C 正确；试验田一稻穗数的众数是 215，故 D 正确，故选 B.

4．由等差数列的性质知 $a_1+a_{11}=2a_6$，于是 $S_{11}=\dfrac{11\times(a_1+a_{11})}{2}=11a_6$，所以 $a_6=3$，那么公差 $d=a_7-a_6=1$，则 $a_1=a_6-5d=-2$，故选 B.

5．由 $\overline{MN}=\lambda\overline{OA}+\mu\overline{OB}$ 得，$\overline{ON}-\overline{OM}=\lambda\overline{OA}+\mu\overline{OB}$，又 $\overline{OM}=\overline{MA}$，$\overline{ON}=2\overline{NB}$，所以 $\dfrac{2}{3}\overline{OB}-\dfrac{1}{2}\overline{OA}=\lambda\overline{OA}+\mu\overline{OB}$，于是 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ 且 $\mu=\dfrac{2}{3}$，得 $\lambda+\mu=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{6}$，故选 C.

6．根据三视图知，三棱锥是一个正四面体，它的外接球与它所在的正方体的外接球是同一个，正方体外接球的直径等于正方体的体对角线，所以 $R=\sqrt{3}$，则 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=4\sqrt{3}\pi$，故选 C.

7．依题意，直线 $y=x$ 是两条曲线 $y=a^x$，$y=\log_a x$ 的公切线，切点为 P，设 $P(x_0,\ x_0)$，因为 $(a^x)'=a^x\ln a$，$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$，且公切线的斜率为 1，所以 $\begin{cases}a^{x_0}\ln a=1 & (1),\\ \dfrac{1}{x_0\ln a}=1 & (2),\end{cases}$ 由(2)得，$\dfrac{1}{\ln a}=x_0$，即 $x_0=\dfrac{\ln \mathrm{e}}{\ln a}$，据换底公式，$x_0=\log_a \mathrm{e}$，将此式代入(1)得，$a^{\log_a \mathrm{e}}\ln a=1$，即 $\mathrm{e}\ln a=1$，解得 $a=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$，故选 D.

8. $\begin{cases}|PF_1|-|PF_2|=2b,\\|PF_1|+|PF_2|=2a,\end{cases}$ 所以$|PF_1|=a+b$，又$|PF_1|\leqslant a+c$，所以$b\leqslant c$，$1>e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$ $\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故选 D.

9. 依题意，方程$\dfrac{\ln x}{x}+(\mathrm{e}-k)x=0\Leftrightarrow k=\dfrac{\ln x}{x^2}+\mathrm{e}$在区间$(1,+\infty)$内有且只有一个解，令$g(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}+\mathrm{e}(x>1)$，即直线$y=k$与曲线$y=g(x)$有且只有一个交点，$g'(x)=\dfrac{x-2x\ln x}{x^4}=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}(x>1)$，由$g'(x)=0$得$x=\sqrt{\mathrm{e}}$，当$1<x<\sqrt{\mathrm{e}}$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$(1,\sqrt{\mathrm{e}})$上单调递增，当$x>\sqrt{\mathrm{e}}$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$(\sqrt{\mathrm{e}},+\infty)$上单调递减，故$g(x)_{\max}=g(\sqrt{\mathrm{e}})=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}+\mathrm{e}$，且当$x\to+\infty$时，$g(x)\to\mathrm{e}$，当$x\to1$时，$g(x)\to\mathrm{e}$，所以$k=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}+\mathrm{e}$，故选 B.

10. 不超过 16 的素数有 2、3、5、7、11、13，满足“和”等于 16 的有(3，13)、(5，11)共有 2 组，总的有(2，3)、(2，5)、(2，7)、(2，11)、(2，13)、(3，5)、(3，7)、(3，11)、(3，13)、(5，7)、(5，11)、(5，13)、(7，11)、(7，13)、(11，13)，$p=\dfrac{2}{15}$，故选 B.

11. 据题意点A的坐标是$\left(\dfrac{a^2}{c},\dfrac{ab}{c}\right)$，点$F$的坐标是$(c,0)$，则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AF}=\left(\dfrac{a^2}{c},\dfrac{ab}{c}\right)\cdot\left(c-\dfrac{a^2}{c},-\dfrac{ab}{c}\right)=a^2-\dfrac{a^4}{c^2}-\dfrac{a^2b^2}{c^2}=a^2-\dfrac{a^2(a^2+b^2)}{c^2}=0$，故选 A.

12. 如图 1，将$\triangle AA_1D$沿A_1D所在直线翻折，使$A\in$平面A_1B_1CD，且点A与点B_1在直线A_1D的异侧，如图 2 所示，因为E是线段A_1D上任意一点，所以$AE+B_1E\geqslant AB_1$，当且仅当A，E，B_1三点共线时，$AE+B_1E$取得最小值，此最小值即为AB_1，在$\triangle AA_1B_1$中，由余弦定理得，$AB_1^2=AA_1^2+A_1B_1^2-2AA_1\cdot A_1B_1\cos(45^\circ+90^\circ)=8+4\sqrt{2}$，所以$AB_1=\sqrt{8+4\sqrt{2}}=2\sqrt{2+\sqrt{2}}$，故选 C.

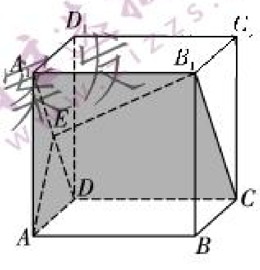

图 1

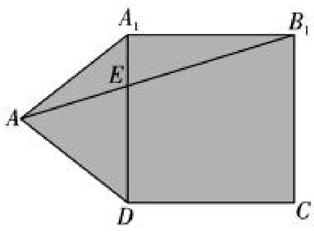

图 2

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

题号	13	14	15	16
答案	$\frac{11}{5}$	$\frac{16}{35}$	2	②④

【解析】

13．作出可行域，如图3中阴影部分所示，由 $\begin{cases}2x+3y=4,\\x-y=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{7}{5},\\y=\frac{2}{5},\end{cases}$ 故 $A\left(\frac{7}{5},\ \frac{2}{5}\right)$，作出直线 $x+2y=0$，数形结合可知，当直线 $z=x+2y$ 过点 $A\left(\frac{7}{5},\ \frac{2}{5}\right)$ 时，$z=x+2y$ 取得最小值为 $\frac{11}{5}$．

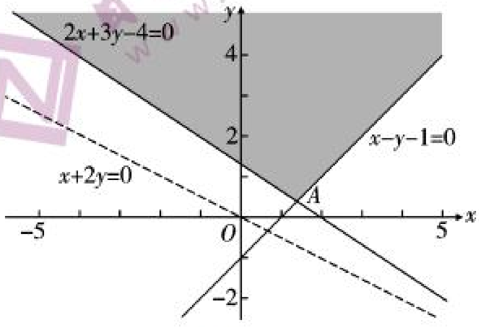

图3

14．当 $n=1$ 时，$a_1=1$；当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2na_n-2(n-1)a_{n-1}$，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2n-2}{2n-1}$，又 $a_4=\frac{a_4}{a_3}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{35}$．

15．根据题意可得图4，过点 $O(0,\ 0)$ 作直线 l_2 的垂线，垂足为 F，记 $|OF|=d(2>d>0)$，则弦 $|DE|=2\sqrt{4-d^2}$，设三角形 ADE 的面积为 S，所以 $S=\frac{1}{2}\cdot d\cdot 2\sqrt{4-d^2}$，将 S 视为 d 的函数，则 $S'=\sqrt{4-d^2}+\frac{1}{2}d\cdot\frac{1}{\sqrt{4-d^2}}\cdot(-2d)=\frac{4-2d^2}{\sqrt{4-d^2}}$，当 $0<d^2<2$ 时，$S'>0$，函数 $S(d)$ 单调递增；当 $d^2>2$ 时，$S'<0$，函数 $S(d)$ 单调递减，所以函数 $S(d)$ 有最大值，当 $d^2=2$ 时取到最大值，$S(d)_{\max}=2$，故 $\triangle ADE$ 面积的最大值为2．

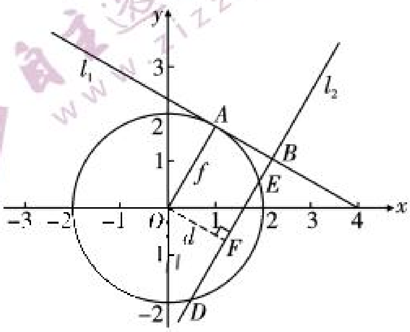

图4

16．由题得 $f(x)=x^2-\cos x+1$，则 $f(x)$ 是偶函数，有 $f(x)=f(|x|)$，$f'(x)=2x+\sin x$，当 $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，进而 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\ 0\right]$ 上单调递减，当 $x_1,\ x_2\in\left[-\frac{\pi}{2},\ 0\right]$ 时，①不成立；对于③：取 $x_1=0,\ x_2=-\frac{\pi}{2}$，有 $f(x_1)=0,\ f(x_2)=\frac{\pi^2}{4}+1$，

则 $f(x_1)<f(x_2)$，可见③也不成立；对于④：$x_1>|x_2|$，有 $x_1>0$，$x_1>|x_2|\Leftrightarrow|x_1|>|x_2|\Leftrightarrow f(|x_1|)>f(|x_2|)\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$，则④成立，又 $|x_1|>|x_2|\Leftrightarrow x_1^2>x_2^2$，所以②也成立，填②④.

三、解答题（共70分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分12分）

解：（1）$e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\to c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$b=\dfrac{1}{2}a$，点 $A(2,\ 1)$ 在椭圆上，

所以 $\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{\frac{a^2}{4}}=1$，得 $a=2\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$，

所以椭圆的方程是 C: $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$. ……………………………………………………（6分）

（2）直线 OA 的方程是 $y=\dfrac{1}{2}x$，因为 $l\perp OA$，且 l 过点 O，

所以直线 l 的方程是 l: $y=-2x$，与椭圆联立得 $17x^2=8\Rightarrow x=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$，

所以 B，D 两点的坐标分别为 $B\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}},\ -\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\right)$，$D\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}},\ \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\right)$，

则 $|BD|=\sqrt{\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\right)^2+\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}+\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{170}}{17}$. ……………………………（12分）

18.（本小题满分12分）

解：（1）由 $b+c=2a\cos B$ 知 $\cos B>0\Rightarrow B\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，

由正弦定理得 $\sin B+\sin C=2\sin A\cos B$，

将 $C=\pi-(A+B)$ 代入该式化简后得 $\sin B=\sin(A-B)$，

由于 A，B，C 是三角形的内角，微信搜《高三答案公众号》

则 $A=2B$ 或者 $\pi-B=A-B$，舍去 $\pi-B=A-B$，

故 $A=2B$，$\triangle ABC$ 外接圆的半径为2，即 $R=2$，且 $b=2$，

由正弦定理得 $\dfrac{b}{\sin B}=2R=4$，

所以 $\sin B=\dfrac{1}{2}$，且 $B\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，

所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$，故 $A=2B=\dfrac{\pi}{3}$． ……………………………………………………（6 分）

（2）因为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 2，即 $R=2$，且 $A=\theta$，

由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin\theta}=2R=4$，所以 $a=4\sin\theta$，

由余弦定理知 $b^2+c^2=a^2+2bc\cos\theta$，根据基本不等式有 $b^2+c^2\geqslant 2bc$，

所以 $a^2+2bc\cos\theta\geqslant 2bc\Rightarrow bc\leqslant\dfrac{a^2}{2(1-\cos\theta)}=\dfrac{8\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$，当 $b=c$ 时取等.

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin\theta\leqslant\dfrac{4\sin^3\theta}{1-\cos\theta}=4\sin\theta(1+\cos\theta)$，

所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $4\sin\theta(1+\cos\theta)$ $(0<\theta<\pi)$． ………………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

（1）证明：因为 M 是 AB 的中点，$AB=4$，所以 $AM=2$，

在 $\triangle ADM$ 中，$\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$，$AD=1$，

由余弦定理得 $DM=\sqrt{3}$，所以 $\triangle ADM$ 是直角三角形，即 $AD\perp DM$，

又 $AD\perp PD$，且 $DM\cap PD=D$，所以 $AD\perp$ 平面 PDM，

因为 $ABCD$ 是平行四边形，有 $BC/\!/AD$，

所以 $BC\perp$ 平面 PDM，且 $BC\subset$ 平面 PBC，

故平面 $PDM\perp$ 平面 PBC． ……………………………………………………（6 分）

（2）解：在底面平行四边形 $ABCD$ 中，分别延长 CB，DM 使它们相交于 Q 点（如图 5 所示）.

则 $\triangle ADM\cong\triangle BQM$．

$\therefore CQ=2$．

且 $Q\in$ 平面 PDM，

由（1）知 $CB\perp$ 平面 PDM，

$\therefore C$ 点到平面 PDM 的距离为 2，又 N 是 PC 中点，

$\therefore N$ 点到平面 PDM 的距离为 1. ……………………………………………………（12 分）

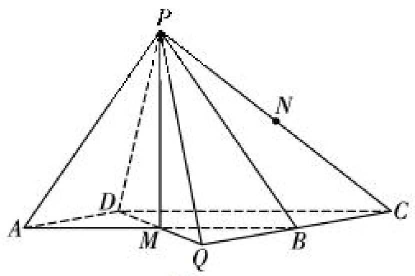

图 5

20.（本小题满分 12 分）

解：（1）由频率分布直方图可知，

$2\times0.5\times a=1-(2\times0.08+0.16+0.42+0.50+0.12+0.04)\times0.5$，

解得 $a=0.30$． ……………………………………………………（3 分）

该市 100 位居民月均用水量不低于 2.5 吨的频率为 $0.15+0.06+0.04+0.02=0.27$，

由以上样本的频率分布，可以估计 10 万居民月均用水量不低于 2.5 吨的人数为

$100000\times0.27=27000$． ……………………………………………………（6 分）

（2）设平均数为 $\bar{x}$ 吨，$\bar{x}=0.25\times0.04+0.75\times0.08+1.25\times0.15+1.75\times0.21+2.25\times0.25+$

$2.75\times0.15+3.25\times0.06+3.75\times0.04+4.25\times0.02=2.03$，

故该市居民月均用水量的平均数为 2.03． ……………………………………（12 分）

21．（本小题满分 12 分）

解：（1）由 $f(0)=d$，得切点 $(0,\ d)$，$f'(x)=3x^2+2bx+c$，$f'(0)=c$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,\ f(0))$ 处的切线方程为 $y-d=c(x-0)$，即 $y=cx+d$，

已知曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,\ f(0))$ 处的切线方程是 $y=1$，

所以 $\begin{cases}c=0,\\ d=1.\end{cases}$ ……………………………………………………（3 分）

当 $b=1$ 时，$f(x)=x^3+x^2+1$，$f'(x)=3x^2+2x$，$f'(x)=0\Rightarrow x_1=0,\ x_2=-\dfrac{2}{3}$，

当 $x\in\left(-\infty,\ -\dfrac{2}{3}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x\in\left(-\dfrac{2}{3},\ 0\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(0,\ +\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $M=f\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2+1=\dfrac{31}{27}$，$m=f(0)=1$，

故 $M+m=\dfrac{58}{27}$． ……………………………………………………（6 分）

（2）设过点 $(0,\ 2)$ 与该曲线相切的切线的切点坐标为 $(x_0,\ y_0)$，$x_0\neq0$，

则切线的斜率为 $f'(x_0)=3x_0^2+2bx_0$，

则 $3x_0^2+2bx_0=\dfrac{y_0-2}{x_0-0}$，即 $3x_0^2+2bx_0=\dfrac{(x_0^3+bx_0^2+1)-2}{x_0}$，

化简得 $2x_0^3+bx_0^2+1=0$，即 $-b=\dfrac{2x_0^3+1}{x_0^2}=2x_0+\dfrac{1}{x_0^2}$，

设函数 $g(x)=2x+\dfrac{1}{x^2}(x\neq 0)$，

$g'(x)=2-\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$，

在 $(1,+\infty)$ 上，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

在 $(0,1)$ 上，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

在 $(-\infty,0)$ 上，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

且当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，当 $x\to 0$ 时，$g(x)\to+\infty$，

当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to-\infty$，$g(1)=3$，如图 6 所示，

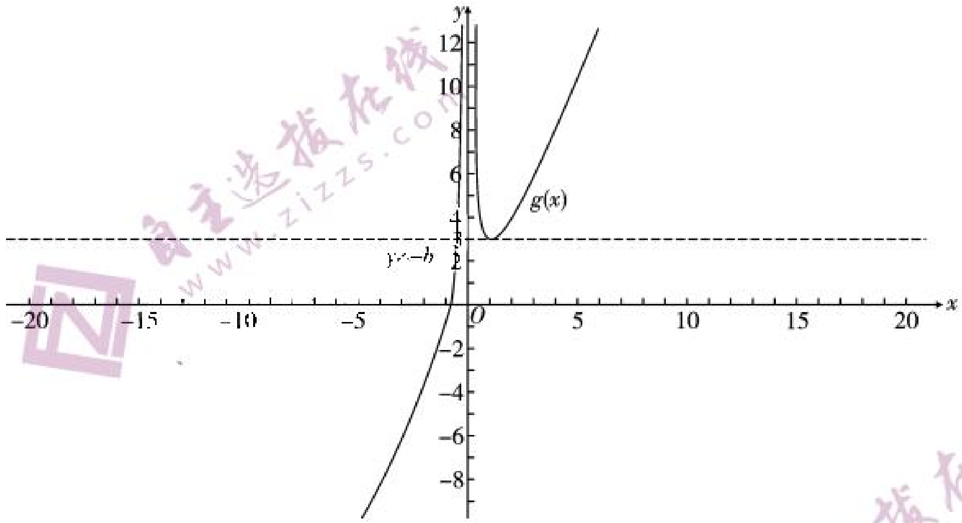

图 6

依题意，直线 $y=-b$ 与 $g(x)$ 的图象有且只有两个交点，

所以 $b=-3$． ……………………………………………………（12 分）

22．（本小题满分 10 分）【选修 4−4：坐标系与参数方程】

解：（1）因为 $x^2+y=\dfrac{1+2t^2+t^4}{1+2t^2+t^4}=1(-1<x\leqslant 1)$，

曲线 C 的普通方程为 $y=-x^2+1(-1<x\leqslant 1)$，

l 的直角坐标方程为 $mx-2y-1=0$． ……………………………………（5 分）

（2）l 过定点 $P\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$，设曲线 C 上的点 $Q(x,-x^2+1)$，且 $-1<x\leqslant 1$，

则 $|PQ|=\sqrt{x^2+\left(x^2-\dfrac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{x^4-2x^2+\dfrac{9}{4}}=\sqrt{(x^2-1)^2+\dfrac{5}{4}}\geqslant\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

当且仅当 $x=1$ 时取得最小值 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$． ……………………………………………………（10 分）

23．（本小题满分 10 分）【选修 4-5：不等式选讲】

解：（1） $f(x)=\begin{cases}x^2-2x,\ x\geqslant 3,\\ 4x-x^2,\ 0<x<3,\\ x^2-4x,\ x\leqslant 0.\end{cases}$

当 $x\geqslant 3$ 时，$x^2-2x\geqslant 3$，解得 $x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -1$，

又 $x\geqslant 3$，所以 $x\geqslant 3$；

当 $0<x<3$ 时，$4x-x^2\geqslant 3$，解得 $1\leqslant x\leqslant 3$，

又 $0<x<3$，所以 $1\leqslant x<3$；

当 $x\leqslant 0$ 时，$x^2-4x\geqslant 3$，解得 $x\geqslant 2+\sqrt{7}$ 或 $x\leqslant 2-\sqrt{7}$，

又 $x\leqslant 0$，所以 $x\leqslant 2-\sqrt{7}$．

综上，原不等式的解集为 $\{x\,|\,x\geqslant 1 或 x\leqslant 2-\sqrt{7}\}$． ……………………………………（5 分）

（2）由绝对值三角不等式可得 $f(x)\geqslant |x^2-2x|$，当且仅当 $(x^2-3x)\cdot x\geqslant 0$ 时取等号，

故解得 $x\geqslant 3$ 或 $x=0$． ……………………………………………………（10 分）

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于中国拔尖人才培养的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户（官方网址：www.zizzs.com）、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ‘’专业、专注、有态度 ‘’ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+ 大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的新高考拔尖人才培养服务平台。