

## 数学试题

2023.5

## 考生注意:

1. 本试卷满分 150 分, 考试用时 120 分钟。
2. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
3. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
4. 考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知  $2A_n^2 = C_9^2 - 4!$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 则  $n =$   
A. 5                      B. 4                      C. 3                      D. 2
2. 甲、乙、丙、丁四名同学参加学校组织的植树活动, 学校共组织了 3 个植树小组, 每人只能参加一个植树小组, 则甲、乙不在同一个植树小组的安排方法有  
A. 81 种                      B. 54 种                      C. 36 种                      D. 12 种
3. 营养学家对某地区居民的身高  $y$  与营养摄入量  $x$  的几组数据进行研究后发现两个变量存在相关关系, 该营养学家按照不同的曲线拟合  $y$  与  $x$  之间的回归方程, 并算出决定系数  $R^2$  如下表所示:

拟合曲线	直线	指数曲线	抛物线	三次曲线
$y$ 与 $x$ 的回归方程	$\hat{y} = f_1(x)$	$\hat{y} = f_2(x)$	$\hat{y} = f_3(x)$	$\hat{y} = f_4(x)$
决定系数 $R^2$	0.893	0.986	0.931	0.312

则这组数据模型的回归方程的最好选择应是

- A.  $\hat{y} = f_1(x)$                       B.  $\hat{y} = f_2(x)$                       C.  $\hat{y} = f_3(x)$                       D.  $\hat{y} = f_4(x)$
4. 设随机变量  $X \sim B(3, p)$ ,  $D(X) = \frac{2}{3}$ , 且  $E(X) > 1$ . 若 8 名党员中有  $\frac{15p}{2}$  名男党员, 从这 8 人中选 4 名代表, 记选出的代表中男党员人数为  $Y$ , 则  $P(Y=3) =$   
A.  $\frac{3}{7}$                       B.  $\frac{4}{7}$                       C.  $\frac{5}{7}$                       D.  $\frac{6}{7}$
5. 已知函数  $f(x) = x^3 - f'(0)x^2 - f(0)e^x - x - f'(0)$ , 则  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2[f(-\Delta x) - f(0)]}{\Delta x} =$   
A. 4                      B. 2                      C. -2                      D. -4
6. 某人外出出差, 委托邻居给家里盆栽浇一次水, 若不浇水, 盆栽枯萎的概率为 0.8; 若浇水, 盆栽枯萎的概率为 0.15. 邻居浇水的概率为 0.8. 则该人回来盆栽没有枯萎的概率为  
A. 0.785                      B. 0.72                      C. 0.765                      D. 0.67



16. 已知函数  $f(x) = a(1 - \frac{1}{x}) - \frac{\ln x}{x^3}$ , 若不等式  $f(x) < 0$  有且只有 2 个整数解, 则实数  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

在① $a_1 = 2a_3$ , ② $a_1, a_2, a_3 - 2$  成等差数列, ③ $S_3 = 14$  这三个条件中选出两个, 补充在下面问题横线上, 并解答问题.

数列  $\{a_n\}$  为递增的等比数列, 其前  $n$  项和为  $S_n$ , 已知\_\_\_\_\_.

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $b_n = \frac{a_{n+1}}{S_n S_{n+1}}$ ,  $T_n$  为数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和, 证明:  $T_n < \frac{1}{2}$ .

注: 如果选择不同的组合分别解答, 则按第一个解答计分.

18. (本小题满分 12 分)

最近几年, 老百姓的储蓄意愿越来越强, 某统计机构统计了最近五年年末安徽省金融机构人民币各项存款余额如下表所示:

年份	2018 年	2019 年	2020 年	2021 年	2022 年
年份代码 $x$	1	2	3	4	5
人民币各项存款余额 $y$ (万亿元)	5.1	5.4	6.0	6.6	7.4

(1) 根据表中所给数据, 用相关系数  $r$  加以判断, 是否可用线性回归模型拟合  $y$  与  $x$  的关系? 若可以, 求出  $y$  关于  $x$  之间的经验回归方程; 若不可以, 请说明理由; (当  $r \in [0.75, 1]$  时, 可以认为两个变量有很强的线性相关性; 否则没有很强的线性相关性)

(2) 为调查老百姓的储蓄意愿强弱, 该机构随机抽查了 300 人, 得到如下列联表, 请填写  $2 \times 2$  列联表, 并判断依据  $\alpha = 0.001$  的独立性检验, 能否认为“储蓄意愿强弱与性别有关”?

	储蓄意愿强	储蓄意愿弱	总计
男			150
女		60	
总计	140		

附: 相关系数  $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$ , 经验回归方程  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$  中斜率和截距的最小

二乘估计公式分别为  $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ,  $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ .  $\sqrt{3440} \approx 58.7$ .

$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ,  $n = a + b + c + d$

$\alpha$	0.10	0.05	0.010	0.005	0.001
$x_\alpha$	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

19. (本小题满分 12 分)

学校组织的亚运会知识竞赛, 设初赛、复赛、决赛三轮比赛, 经过前两轮比赛, 甲、乙两人进入冠亚军决赛, 获胜者获得冠军, 失败者获得亚军. 本轮比赛设置 5 道抢答题目, 甲与乙抢到题目的机会均等, 先抢到题目者回答问题, 回答正确得 10 分, 回答错误或者不回答得 0 分, 对方得 10 分, 先得 30 分者获胜, 比赛结束. 已知甲与乙每题回答正确的概率分别为 0.8, 0.6.

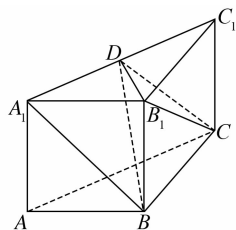
- (1) 在第一题的抢答中, 记甲的得分为  $X$ , 求  $X$  的分布列和数学期望;
- (2) 求乙获得冠军的概率(精确到 0.001).

20. (本小题满分 12 分)

如图, 在直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $AB=BC$ ,  $AA_1=4$ ,  $AC=4\sqrt{3}$ , 点  $D$  为  $A_1C_1$  上一点, 且  $A_1B \parallel$  平面  $B_1CD$ .

- (1) 求  $\frac{A_1D}{A_1C_1}$  的值;

- (2) 若三棱锥  $B-B_1CD$  的体积为  $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ , 求平面  $ABB_1A_1$  与平面  $B_1CD$  夹角的余弦值.



21. (本小题满分 12 分)

已知双曲线  $C$  与椭圆  $E: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  的焦点重合, 且  $C$  与  $E$  的离心率之积为  $\frac{5}{6}$ .

- (1) 求双曲线  $C$  的标准方程;
- (2) 设双曲线  $C$  的左、右顶点分别为  $A_1, A_2$ , 若直线  $l: y=kx+m$  与圆  $x^2+y^2=4$  相切, 且与双曲线左、右两支分别交于  $P_1, P_2$  两点, 记直线  $P_1A_1$  的斜率为  $k_1$ ,  $P_2A_2$  的斜率为  $k_2$ , 那么  $k_1 \cdot k_2$  是否为定值? 并说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = x - a + 2a \ln x - 3x \ln x$ ,  $a \in \mathbf{R}$ .

- (1) 当  $a=0$  时, 求  $f(x)$  的单调区间和极值;
- (2) 若  $f(x)$  有两个零点, 求  $a$  的取值范围.