

2022-2023 学年度上学期期末教学质量监测高三年级数学参考答案

一、单选题

1. 【D】 $M = \{x | x > 2\}$, $N = \{x | 0 < x < 3\}$, $M \cup N = \{x | x > 0\}$, 故选 D

2. 【C】 $z = \frac{2i+1}{-1} + 3i = -1+i$, $\bar{z} = -1-i$ 对应的点 $(-1, -1)$ 位于第三象限, 故选 C

3. 【C】 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $t = -4$, $\vec{a} + 2\vec{b} = (-3, -6)$, 则 $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}$, 故选 C

4. 【A】 展开式所有项的系数和为 243, 所以 $3^n = 243$, $n = 5$, 展开式的常数项 $C_5^4 (2x^2)(x^{-\frac{1}{2}})^4 = 10$, 故选 A

5. 【A】 从盒中任取 1 球, 是红球记为 A_1 , 黑球记为 A_2 , 白球记为 A_3 , A_1, A_2, A_3 彼此互斥

设第二次抽出的是红球记为事件 B, $P(A_1) = \frac{2}{7}, P(A_2) = \frac{3}{7}, P(A_3) = \frac{2}{7}, P(B|A_1) = \frac{3}{8}, P(B|A_2) = \frac{1}{4}, P(B|A_3) = \frac{1}{4}$,

$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) = \frac{2}{7} \times \frac{3}{8} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{7}$. 故选 A

6. 【B】 当 PC 与直线 $3x - 4y + 12 = 0$ 垂直时, 过 P 作圆的两条切线, 切点为 M, N, 此时 $\angle MPN$ 最大;

$|PC| = \frac{|6-8+12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 2$, $|CM| = 1, \sin \angle CPM = \frac{1}{2}, \angle CPM = 30^\circ$

$\angle MPN$ 的最大值为 $2\angle CPM = 60^\circ$, 故选 B

7. 【C】 过 A 作抛物线准线的垂线, 垂足为 D

法 1. 由 $\tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} = -4\sqrt{5}$, 得 $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $\tan \frac{\theta}{2} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (舍), 所以 $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{2}{3}$,

设抛物线的标准方程为 $y^2 = 4fx$, $A(x_0, \frac{d}{2})$,

$|AF| \cos \frac{\theta}{2} + x_0 = f$, $\frac{2}{3}(x_0 + f) + x_0 = f$, 所以 $x_0 = \frac{f}{5}$,

所以 $\frac{d^2}{4} = 4f \frac{f}{5}$, $\frac{f^2}{d^2} = \frac{5}{16}$, 所以 $\frac{f}{d} = \frac{\sqrt{5}}{4}$

法 2. $\tan \theta = -4\sqrt{5}$, 则 $\cos \theta = -\frac{1}{9}$, 在 $\triangle ABF$ 中, 由余弦定理得 $|AF| = \frac{3\sqrt{5}}{10}d$

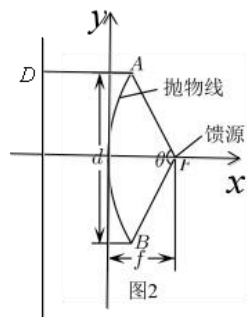
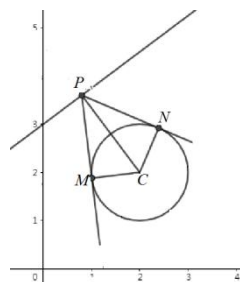
$|AF| = \frac{3\sqrt{5}}{10}d = x_0 + f$, $x_0 = \frac{3\sqrt{5}}{10}d - f$, $A(\frac{3\sqrt{5}}{10}d - f, \frac{d}{2})$ 代入 $y^2 = 4fx$,

$\frac{d^2}{4} = 4(\frac{3\sqrt{5}}{10}d - f)f$, 即 $16\sqrt{5}\frac{f^2}{d^2} - 24\frac{f}{d} + \sqrt{5} = 0$, $\frac{f}{d} = \frac{\sqrt{5}}{20}$ 或 $\frac{f}{d} = \frac{\sqrt{5}}{4}$

因为 $d < 4f$, 所以 $\frac{f}{d} > \frac{1}{4}$, 所以 $\frac{f}{d} = \frac{\sqrt{5}}{4}$

8. 【B】 $f(x+1) - 3$ 为奇函数, $f(-x+1) - 3 = -f(x+1) + 3$, 所以 $f(x)$ 关于 $(1, 3)$ 对称, $f(1) = 3$

$f(x+2)$ 为偶函数, $f(-x+2) = f(x+2)$, 则 $f(x)$ 关于 $x = 2$ 对称, 周期 $T = 4$,



$f(x) = 6 - f(2 - x) = 6 - f(2 + x) = f(-x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数

$f(-1) + f(0) = f(1) + f(0) = 1$, 所以 $f(0) = -2$, 所以 $f(2) = 6 - f(0) = 8$

$$\begin{cases} f(1) = a + b = 3 \\ f(2) = 4a + b = 8 \end{cases}, \begin{cases} a = \frac{5}{3} \\ b = \frac{4}{3} \end{cases}, \text{当 } x \in [1, 2] \text{ 时, } f(x) = \frac{5}{3}x^2 + \frac{4}{3}$$

$$f\left(\frac{2023}{2}\right) = f\left(1012 - \frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 - f\left(\frac{3}{2}\right) = 6 - \frac{61}{12} = \frac{11}{12}, \text{选 B}$$

二、多选题

9. 【AC】 设建设前农村的经济收入为 a , 则新农村建设后经济收入为 $2a$,

建设前农村的种植收入为 $0.6a$, 则新农村建设后经济收入为 $0.74a$, 故 A 正确

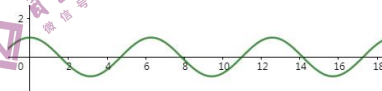
建设前农村的其他收入为 $0.04a$, 则新农村建设后其他收入为 $0.1a$, $\frac{0.1a}{0.04a} = 2.5$, 故 B 错误

建设前农村的养殖收入为 $0.3a$, 则新农村建设后养殖收入为 $0.6a$, 故 C 正确

新农村建设后其他收入与第三产业收入的总和占比 $33\% < \frac{1}{3}$, 故 D 错误

10. 【BD】 $V_{ABCDPE} = V_{C-ABEP} + V_{P-ACD} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} (1+2) \times 1 \times 2 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times 2 = \frac{5}{3}$, 故 A 错误

$V_1 = \frac{1}{3}$, $V_2 = \frac{1}{3}$, $V_3 = \frac{2}{3}$, 所以 $V_3 = 2V_2$, $V_1 + V_2 = V_3$. 故 B, D 正确, C 错误

11. 【BCD】 因为 $0 < x < 2\pi$, 所以 $\frac{\pi}{3} < \omega x + \frac{\pi}{3} < 2\pi\omega + \frac{\pi}{3}$, 

若 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 内恰有 4 个零点, 则 $\frac{7}{2}\pi < 2\pi\omega + \frac{\pi}{3} \leq \frac{9}{2}\pi$, 解得 $\frac{19}{12} < \omega \leq \frac{25}{12}$, 故 C 正确

由图像可知, $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 内有 1 或 2 个极大值点, 故 A 错误

$f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 内有且仅有 2 个极小值点, 故 B 正确

当 $0 < x < \frac{\pi}{5}$ 时, $0 < \omega x + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{5}\omega + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{5} \cdot \frac{25}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} < \pi$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{5})$ 内单调递减, 故 D 正确

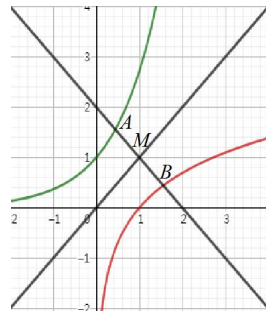
12. 【ACD】 $e^x = 2 - x$, $\ln x = 2 - x$, $y = e^x$ 和 $y = \ln x$ 图像关于 $y = x$ 对称

$y = x$ 与 $y = 2 - x$ 交点 $M(1, 1)$, $A(a, e^a)$, $B(b, \ln b)$, $a = \ln b$, $b = e^a$

A. $a + b = 2 > 2\sqrt{ab}$, 所以 $ab < 1$, 所以 A 正确

B. $e^a + \ln b = b + a = 2$, 所以 B 错误

C. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, $f(0) = -1 < 0$, $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} - \frac{3}{2} > 0$, 所以 $a \in (0, \frac{1}{2})$



四、解答题

17. 解: (I) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d \neq 0)$

因为 a_4 是 a_2 和 a_8 的等比中项, 所以 $a_4^2 = a_2 a_8$,

即 $(a_1 + 3d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 7d)$, 整理得 $a_1 d = d^2$,

因为 $d \neq 0$, 所以 $a_1 = d$ ① 2 分

又因为 $S_9 = 90$, 所以 $S_9 = 9a_1 + \frac{9 \times 8}{2} d = 90$, 整理得 $a_1 + 4d = 10$ ② 3 分

由①②联立得: $a_1 = d = 2$ 4 分

所以 $a_n = 2 + (n-2) \times 2 = 2n$, 即 $a_n = 2n$ 5 分

(II) 已知 $b_n = [\lg a_n]$, 所以 $b_n = \begin{cases} 0, 1 \leq n \leq 4 \\ 1, 5 \leq n \leq 49 \\ 2, 50 \leq n \leq 100 \end{cases}$ 8 分

所以 $T_{100} = 0 \times 4 + 1 \times 45 + 2 \times 51 = 147$ 10 分

18. 解: (I) $a + b \cos C = 0$

由正弦定理得 $\sin A + \sin B \cos C = 0$, 1 分

所以 $\sin(B+C) + \sin B \cos C = 0$, 即 $2 \sin B \cos C + \cos B \sin C = 0$, 3 分

所以 $2 \tan B + \tan C = 0$ 5 分

(II) 因为 $a = -b \cos C > 0$, 所以 $\cos C < 0$, 即 C 为钝角,

所以 $2 \tan B = -\tan C > 0$ 6 分

$\tan A = -\tan(B+C) = -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C} = \frac{\tan B}{1 + 2 \tan^2 B}$ 7 分

$= \frac{1}{\frac{1}{\tan B} + 2 \tan B} \leq \frac{1}{2 \sqrt{\frac{1}{\tan B} \cdot 2 \tan B}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 8 分

当且仅当 $\frac{1}{\tan B} = 2 \tan B$, 即 $\tan B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立 9 分

$\tan C = -2 \tan B = -\sqrt{2}$, 所以 $\sin C = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos C = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 10 分

$a = -b \cos C = -3 \times (-\frac{\sqrt{3}}{3}) = \sqrt{3}$ 11 分

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 3 \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 12 分

(其他方法酌情给分)

19.证明: (I) 取 PA 的中点 M , 连接 EM, DM

因为 E, F 分别是 PB, CD 的中点

$$\text{所以 } EM \parallel \frac{1}{2} AB, FD \parallel \frac{1}{2} AB$$

所以 $EM \parallel FD$, 所以四边形 $EFDM$ 为平行四边形, 所以 $EF \parallel MD$ 2 分

因为四边形 $ABCD$ 是正方形, 所以 $AB \perp AD$ 3 分

又因为 $AB \perp EF, EF \parallel MD$, 所以 $AB \perp MD$ 4 分

$MD \cap AD = D$, 所以 $AB \perp$ 平面 PAD 5 分

又因为 $AB \subset$ 平面 $ABCD$, 所以平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ 6 分

(II) 法 1: 取 AD 的中点 O , 连接 PO ,

因为 $PA = PD$, 所以 $PO \perp AD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$,

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 PO, AB, OD 两两垂直

以 O 为原点, 向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OP}$ 的方向为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向建立如图所示的平面直角坐标系 $O-xyz$ 8 分

$$O(0,0,0), P(0,0,\sqrt{3}), C(2,1,0), F(1,1,0), B(2,-1,0), E(1,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\overrightarrow{CE} = (-1, -\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{CP} = (-2, -1, \sqrt{3}), \overrightarrow{CF} = (-1, 0, 0)$$

设 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$ 是平面 PCE 的法向量

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{CP} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{CE} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -2x_1 - y_1 + \sqrt{3}z_1 = 0 \\ -x_1 - \frac{3}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_1 = 0 \end{cases}, \text{ 取 } x_1 = \sqrt{3}, \text{ 则 } z_1 = 2, y_1 = 0, \text{ 所以 } \vec{m} = (\sqrt{3}, 0, 2) \text{ 9 分}$$

设 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$ 是平面 CEF 的法向量

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{CF} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CE} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -x_2 = 0 \\ -x_2 - \frac{3}{2}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_2 = 0 \end{cases}, \text{ 取 } y_2 = 1, \text{ 则 } x_2 = 0, z_2 = \sqrt{3}, \text{ 所以 } \vec{n} = (0, 1, \sqrt{3}) \text{ 10 分}$$

$$\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7} \text{ 11 分}$$

由图可知, 二面角 $P-CE-F$ 的为锐二面角

所以二面角 $P-CE-F$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$ 12 分

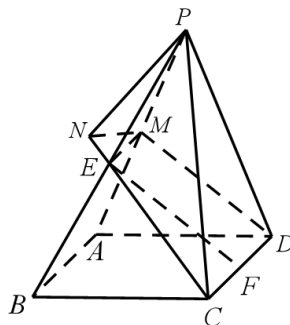
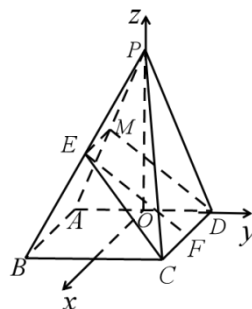
(其他建系方法酌情给分)

法 2: 过 M 作 $MN \perp CE$, 交 CE 的延长线于 N , 连接 PN

由 (I) 可知, $ME \parallel CD$, 所以 M, E, C, D 四点共面

因为 $ME \parallel AB, AB \perp PA$, 所以 $ME \perp PA$

在等边 $\triangle PAD$ 中, M 是 PA 中点, 所以 $MD \perp PA$



$EM \cap DM = M$, 所以 $PA \perp$ 平面 $MECD$

又因为 $MN \perp CE$, 由三垂线定理得, $PN \perp CE$

所以 $\angle PNM$ 就是二面角 $P-CE-F$ 的平面角.....8 分

在直角 $\triangle EFC$ 中, $CF = 1, EF = MD = \sqrt{3}, \tan \angle ECF = \sqrt{3}$,

所以 $\angle NEM = \angle ECF = 60^\circ$,

又因为 $ME = \frac{1}{2}AB = 1, PM = 1$, 所以 $MN = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $PN = \sqrt{MN^2 + PM^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + 1} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

在直角 $\triangle PMN$ 中, $\cos \angle PNM = \frac{MN}{PN} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$ 11 分

所以二面角 $P-CE-F$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$ 12 分

20.解: (I) 记一轮踢球, 甲进球为事件 A , 乙进球为事件 B , A, B 相互独立,

由题意得: $P(A) = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$,1 分

甲的得分 X 的可能取值为 $-1, 0, 1$

$P(X = -1) = P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$,2 分

$P(X = 0) = P(AB) + P(\bar{A}\bar{B}) = P(A)P(B) + P(\bar{A})P(\bar{B}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{12}$ 3 分

$P(X = 1) = P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$,4 分

所以 X 的分布列为:

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$

.....5 分

$E(X) = -1 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{7}{12} + 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ 6 分

(II) 经过三轮踢球, 甲累计得分高于乙有四种情况: 甲 3 轮各得 1 分; 甲 3 轮中有 2 轮各得 1 分, 1 轮得 0 分; 甲 3 轮中有 1 轮得 1 分, 2 轮各得 0 分; 甲 3 轮中有 2 轮各得 1 分, 1 轮得 -1 分.7 分

甲 3 轮各得 1 分的概率为 $p_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$ 8 分

甲 3 轮中有 2 轮各得 1 分, 1 轮得 0 分的概率为 $p_2 = C_3^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{64}$ 9 分

甲 3 轮中有 2 轮各得 1 分, 1 轮得 -1 分的概率为 $p_3 = C_3^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{32}$ 10 分

甲 3 轮中有 1 轮得 1 分, 2 轮各得 0 分的概率为 $p_4 = C_3^1 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{49}{192}$ 11 分

所以经过三轮踢球，甲累计得分高于乙的概率 $p = \frac{1}{64} + \frac{7}{64} + \frac{1}{32} + \frac{49}{192} = \frac{79}{192}$ 12 分

21. (I) $f'(x) = \frac{x+1+a}{(x+1)^2}$ 1 分

当 $a \geq -1$ 时，因为 $x \geq 0$ ，所以 $f'(x) \geq 0$ ， $f(x)$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 上单调递增

所以 $f(x) \geq f(0) = 0$ ，符合题意3 分

当 $a < -1$ 时，若 $x \in (0, -a-1)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 在 $(0, -a-1)$ 上单调递减

此时， $f(x) < f(0) = 0$ 与 $f(x) \geq 0$ 矛盾，不符合题意5 分

综上所述，实数 a 的取值范围是 $[-1, +\infty)$ 6 分

(II) 由 (I) 知，当 $a = -1$ 时，若 $x \geq 0$ ，有 $\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \geq 0$ ，当且仅当 $x = 0$ 时等号成立

所以，当 $x > 0$ 时， $\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}$ 7 分

令 $x = \frac{1}{n}$ ，有 $\ln(\frac{1}{n}+1) > \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1}$ ，即 $\ln(n+1) - \ln n > \frac{1}{1+n}$ 8 分

因为 $n^2 - 1 < n^2, n \in N^*$ ，所以 $\frac{1}{n+1} > \frac{n-1}{n^2}$ ，即 $\ln(n+1) - \ln n > \frac{n-1}{n^2}$ ， $n \in N^*$ 10 分

所以 $(\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \dots + [\ln(n+1) - \ln n] > \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \dots + \frac{n-1}{n^2}$

即 $\ln(n+1) > \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} (n \in N^*)$ 12 分

22. 解: (I)
$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ a^2 = b^2 + c^2 \\ \frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 2 \\ b = \sqrt{3} \\ c = 1 \end{cases}$$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 3 分

(II) (i) 法 1: 设过 $A(1, -\frac{3}{2})$ 与抛物线 $y = mx^2$ 相切的直线方程为 $y = k(x-1) - \frac{3}{2} (k \neq 0)$

$$\begin{cases} y = k(x-1) - \frac{3}{2} \\ y = mx^2 \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 得: } mx^2 - kx + k + \frac{3}{2} = 0,$$

$$\Delta = k^2 - 4m(k + \frac{3}{2}) = 0, \text{ 即 } k^2 - 4mk - 6m = 0 \text{4 分}$$

直线 AP, AQ 的斜率分别为 k_1, k_2 ，则 k_1, k_2 是方程 $k^2 - 4mk - 6m = 0$ 的两根

$$k_1 + k_2 = 4m, k_1 k_2 = -6m, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{消去 } m \text{ 得: } \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = -\frac{2}{3} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

法 2: 设过 $A(1, -\frac{3}{2})$ 的直线与抛物线 $y = mx^2$ 相切的切点坐标为 $(x_3, mx_3^2), (x_4, mx_4^2)$

$$y' = 2mx, \text{ 则 } k_1 = 2mx_3, k_2 = 2mx_4,$$

$$\text{直线 } AP: y = 2mx_3(x - x_3) + mx_3^2, \text{ 即 } y = 2mx_3x - mx_3^2$$

$$\text{同理可得 } AQ: y = 2mx_4x - mx_4^2$$

$$\begin{cases} y = 2mx_3x - mx_3^2 \\ y = 2mx_4x - mx_4^2 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} x = \frac{x_3 + x_4}{2} = 1 \\ y = mx_3x_4 = -\frac{3}{2} \end{cases} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{2mx_3} + \frac{1}{2mx_4} = \frac{x_3 + x_4}{2mx_3x_4} = -\frac{2}{3}, \text{ 所以 } \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = -\frac{2}{3} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

(ii) 设直线 $PQ: x = ty + n, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2),$

$$\begin{cases} x = ty + n \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases}, \text{ 消去 } x \text{ 得: } (3t^2 + 4)y^2 + 6tny + 3n^2 - 12 = 0$$

$$y_1 + y_2 = -\frac{6tn}{3t^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{3n^2 - 12}{3t^2 + 4} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = -\frac{2}{3}, \text{ 所以 } \frac{x_1 - 1}{y_1 + \frac{3}{2}} + \frac{x_2 - 1}{y_2 + \frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}, \text{ 所以 } \frac{ty_1 + n - 1}{y_1 + \frac{3}{2}} + \frac{ty_2 + n - 1}{y_2 + \frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{整理得: } (2t + \frac{2}{3})y_1 y_2 + (n + \frac{3}{2}t)(y_1 + y_2) + 3(n - \frac{1}{2}) = 0 \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$(2t + \frac{2}{3})\frac{3n^2 - 12}{3t^2 + 4} + (n + \frac{3}{2}t)\frac{-6tn}{3t^2 + 4} + 3(n - \frac{1}{2}) = 0$$

$$\text{即 } 4n^2 + 24n = 9t^2 + 48t + 28, \text{ 所以 } 4(n + 3)^2 = (3t + 8)^2$$

$$\text{所以 } n = \frac{3}{2}t + 1 \text{ 或 } n = -\frac{3}{2}t - 7, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{当 } n = \frac{3}{2}t + 1 \text{ 时, } x = ty + \frac{3}{2}t + 1 = (y + \frac{3}{2})t + 1, PQ \text{ 恒过定点 } (1, -\frac{3}{2}) \text{ 与 } A \text{ 重合, 舍去}$$

$$\text{当 } n = -\frac{3}{2}t - 7 \text{ 时, } x = ty - \frac{3}{2}t - 7 = (y - \frac{3}{2})t - 7, PQ \text{ 恒过定点 } (-7, \frac{3}{2})$$

$$\text{综上所述, 直线 } PQ \text{ 恒过定点 } (-7, \frac{3}{2}) \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$