

晋中市 2023 年 5 月普通高等学校招生模拟考试

数 学

(时间:120 分钟 满分:150 分)

一、单项选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中有且只有一个选项符合题目要求)

1. 已知集合 $M = \{x | -4 < x < 2\}$, $N = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{x | -4 < x < 3\}$ B. $\{x | -4 < x < -2\}$
C. $\{x | -2 < x < 2\}$ D. $\{x | 2 < x < 3\}$

2. 欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ ($x \in \mathbf{R}$) 是由瑞士著名数学家欧拉发现的,该公式被誉为数学中的天桥.若复数 $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, 则 $z_1 z_2 =$ ()

- A. $-i$ B. i
C. $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

3. 设向量 a 与向量 b 的夹角为 θ , 定义 a 与 b 的向量积: $a \times b$ 是一个向量,它的模 $|a \times b| = |a||b|\sin \theta$. 若 $m = (1, 0)$, $n = (-1, \sqrt{3})$, 则 $|m \times n| =$ ()

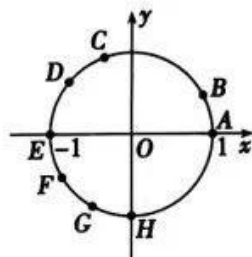
- A. -1 B. 1
C. $-\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$

4. 田忌赛马的故事每个人都耳熟能详,众所周知,田忌的上等马优于齐王的中等马,劣于齐王的上等马;田忌的中等马优于齐王的下等马,劣于齐王的中等马;田忌的下等马劣于齐王的下等马.假设田忌与齐王有上等、中等、下等马各一匹,现从双方的马匹中各随机选一匹进行一场比赛,则田忌的马获胜的概率为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{9}$

5. 角 α 的始边与 x 轴的非负半轴重合,终边与单位圆交于点 P . 已知 $\tan \alpha > \sin \alpha > \cos \alpha$, 则点 P 可能位于如图所示单位圆的哪一段圆弧上 ()

- A. \widehat{AB} B. \widehat{CD}
C. \widehat{EF} D. \widehat{GH}



6. 已知 α, β 为锐角,且 $\tan \alpha = 2$, $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\cos \beta =$ ()

- A. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$
C. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

7. 已知点 P 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的表面上运动, 则 $\vec{PA} \cdot \vec{PB}$ 的最大值为 ()
- A. 6
B. 7
C. 8
D. 9

8. 设 $a=2^{\frac{1}{2}}, b=e^{\frac{1}{2}}, c=3^{\frac{1}{3}}$, 则 ()
- A. $a < c < b$
B. $a < b < c$
C. $b < a < c$
D. $c < b < a$

二、多项选择题(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分)

9. 下列各式中能够说明随机事件 A 与随机事件 B 相互独立的是 ()
- A. $P(A|B) = P(B|A)$
B. $P(A|B) = P(A|\bar{B})$
C. $P(A) = P(A|B)$
D. $P(B) = P(A|B)$

10. ChatGPT 是 OpenAI 公司推出的一种人工智能聊天机器人, 不仅能流畅对话, 还能写诗、撰文、编码等. 一经推出, 便受到广泛关注, 并产生了丰富的社会应用. 某调查机构为了解美国大学生用 ChatGPT 代写作业的学生比例, 对 8 所高校进行了调查, 其中 6 所学校给出了代写作业的学生占比, 将数据从小到大依次排列为: 71%、75%、77%、80%、82%、85%, 另外两所学校以侵犯隐私为由拒绝给出调查数据, 那么这 8 所学校使用 ChatGPT 代写作业的学生比例的中位数可能是 ()
- A. 76%
B. 77.5%
C. 80%
D. 81.5%

11. 已知函数 $f(x) = |x \ln x|$, 关于 x 的方程 $f(x)^2 - \frac{2}{e}f(x) + a = 0$, 下列结论正确的是 ()
- A. 存在 $a \in \mathbf{R}$ 使方程恰有 2 个不相等的实根
B. 存在 $a \in \mathbf{R}$ 使方程恰有 4 个不相等的实根
C. 存在 $a \in \mathbf{R}$ 使方程恰有 5 个不相等的实根
D. 存在 $a \in \mathbf{R}$ 使方程恰有 6 个不相等的实根

12. 已知圆 $C: (x-a)^2 + (y-e^a)^2 = 1$, 则 ()
- A. 存在两个不同的 a , 使得圆 C 经过坐标原点
B. 存在两个不同的 a , 使得圆 C 在 x 轴和 y 轴上截得的线段长相等
C. 存在唯一的 a , 使得圆 C 的面积被直线 $y = ex$ 平分
D. 存在三个不同的 a , 使得圆 C 与 x 轴或 y 轴相切

三、填空题(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 请将正确答案填入答题卡中对应的位置)

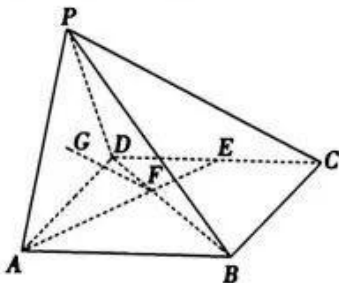
13. 设 $x > -1, y > 0$ 且 $x + 2y = 1$, 则 $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 _____.
14. 从 0, 1, 2, ..., 9 这 10 个数字中任取三个数, 使这三个数的和是 3 的倍数, 则不同的取法有 _____ 种. (用数字作答)
15. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB \perp BC, A = \frac{\pi}{3}, D$ 是 AC 边的中点, 且 $AC = 2$. 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起, 使平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , 形成四面体 $A-BCD$. 则该四面体外接球的表面积为 _____.

16. 点 A_1, A_2 是双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右顶点. 若直线 $x = \frac{c^2}{a}$ 上存在点 P , 使得

$\angle A_1 P A_2 = \frac{\pi}{6}$, 则该双曲线的离心率取值范围为_____.

四、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, E 是 CD 的中点, AE 与 BD 交于点 F , G 是 $\triangle PAD$ 的重心.



(1) 求证: $GF \parallel$ 平面 PCD ;

(2) 若平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $\triangle PAD$ 为等腰直角三角形, 且 $PA = PD = AB = 2\sqrt{2}$, 求直线 AG 与平面 PBD 所成角的正弦值.

18. (本小题满分 12 分) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $2S_n = na_n$, 且 $a_2 = 1$.

(1) 求证: 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 从下列三个条件中选一个填在横线上, 并完成下列问题.

若_____, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

① $b_n = a_n \cdot 2^n$; ② $b_n = (-1)^n a_n + 2^n$; ③ $b_n = \frac{2}{(n+2)a_{n+1}}$.

19. (本小题满分 12 分) 锐角 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin C = 2\cos$

$$A \sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right).$$

(1) 求 A ;

(2) 若 $b+c=6$, 求 BC 边上的高 AD 长的最大值.

20. (本小题满分 12 分) 晋中市是晋商文化的发源地, 且拥有丰富的旅游资源. 其中有保存完好的大院人文景观(如王家大院, 常家庄园等), 也有风景秀丽的自然景观(如介休绵山, 石膏山等). 某旅行团带游客来晋中旅游, 游客可自由选择人文景观和自然景观中的一处游览. 若每位游客选择人文景观的概率是 $\frac{2}{3}$, 选择自然景观的概率为 $\frac{1}{3}$, 游客之间选择意愿相互独立.

(1) 从游客中随机选取 5 人, 记 5 人中选择人文景观的人数为 X , 求 X 的均值与方差;

(2) 现对游客进行问卷调查, 若选择人文景观记 2 分, 选择自然景观记 1 分, 记已调查过的累计得分为 n 分的概率为 P_n , 求 P_n .

21. (本小题满分 12 分) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A, B , 过左焦点 $F(-1, 0)$ 的直线与椭圆交于 C, D 两点(其中 C 点位于 x 轴上方), 当 CD 垂直于 x 轴时, $|CD| = 3$.

(1) 求椭圆的方程; 求 \dots

(2) 记直线 AC, BD 的斜率分别为 k_1, k_2 , 求 $k_1 + \frac{1}{k_2}$ 的最小值.

22. (本小题满分 12 分) $f(x) = 2\ln x - ax - \frac{3}{ax}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) $g(x) = f(x) + x^2 + \frac{3}{ax}$, 若 $g(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 试求 $g(x_2) - 2g(x_1)$ 的最大值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

