

数 学

命题：宋润生 杨晓东 王洪东 孙颖 郭欣

审核：宋润生 杨晓东

注意事项：

- 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 本试卷共 22 题，共 150 分，共 5 页。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{N}^* | (x+1)(x-a) \leq 0\}$, $B = \{-3, -2, 1\}$, 若 $A \subseteq B$ 且 $A \cap B \neq \emptyset$, 则 $a =$

- A. -3 B. -2 C. 0 D. 1

2. 下列函数中为偶函数的是

- A. $y = \lg x$ B. $y = \sqrt[3]{x}$
 C. $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x$ D. $y = \frac{x^2}{x+1}$

3. 向量 $\mathbf{a} = (2, 1)$, $\mathbf{b} = (-3, 4)$, 则 \mathbf{a} 在 \mathbf{b} 方向上投影的数量为

- A. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $-\frac{2}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

4. 图 1 是世界上单口径最大、灵敏度最高的射电望远镜“中国天眼”——500m 口径抛物面射电望远镜，反射面的主体是一个抛物面（抛物线绕其对称轴旋转所形成的曲面称为抛物面），其边缘距离底部的落差约为 156.25 米，它的一个轴截面是一个开口向上的抛物线 C 的一部分，放入如图 2 所示的平面直角坐标系 xOy 内，已知该抛物线上点 P 到底部水平线（ x 轴）距离为 125m，则点 P 到该抛物线焦点 F 的距离为



图 1

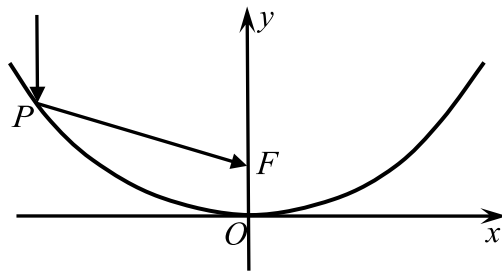


图 2

- A. 225m B. 275m C. 300m D. 350m

5. $\sqrt{1+\sin 10} =$

- A. $-\sin 5 - \cos 5$ B. $\sin 5 - \cos 5$ C. $-\sin 5 + \cos 5$ D. $\sin 5 + \cos 5$

6. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若对任意的 $x \in D$, 都存在 $x_0 \in D$, 使得 $x + f(x_0) = 1$, 则“ $f(x)$ 存在零点”是“ $1 \in D$ ”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分且必要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 设 C_1 与 C 分别为圆柱上下底面圆周上的点, 且位于该圆柱轴截面 ABB_1A_1 同侧, 下底面圆心 O 在 AB 上, 若 $\widehat{BC} = 2\widehat{CA}$, $\widehat{A_1C_1} = 2\widehat{C_1B_1}$, $\cos \angle C_1CO = \frac{1}{3}$, 则直线 CC_1 与 AB 所成角的余弦值为

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

8. 已知 a, b 满足 $ae^a = e^3$, $b \ln b = e^4 + b$, 则

- A. $\frac{5}{2} < a < e$ B. $ab > e^4$ C. $b < e^2 a$ D. $\frac{2}{5}e^4 < b < \frac{e^4}{2}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 若 $f(x) = \cos x + \sqrt{3} \sin x$, 则

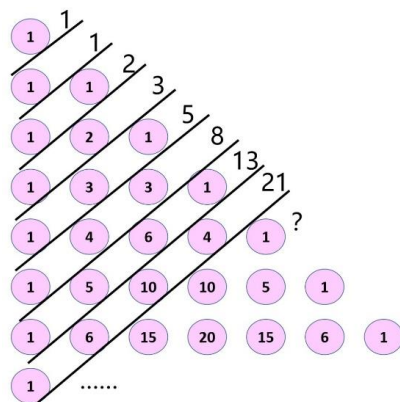
- A. $(\frac{5\pi}{6}, 0)$ 是 $f(x)$ 图象的对称中心
B. 若 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 分别为 $f(x)$ 图象的对称轴, 则 $f(x_1) = f(x_2)$
C. 在 $[0, 2\pi)$ 内使 $f(x) = \frac{1}{2}$ 的所有实数 x 值之和为 $\frac{8\pi}{3}$
D. 在 $[0, 2\pi)$ 内有三个实数 x 值, 使得 $f(x) = 1$

10. 在复平面内, O 为坐标原点, 复数 z , $z+1$ 对应的点 A, B 都在单位圆 O 上, 则

- A. $\triangle OAB$ 为直角三角形 B. $\bar{z} + 1$ 对应的点在单位圆 O 上
C. 直线 AB 与虚轴垂直 D. $z^2 + 1 = \bar{z}$

11. 如图, 杨辉三角形中的对角线之和 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... 构成的斐波那契数列经常在自然中神奇地出现, 例如向日葵花序中央的管状花和种子从圆心向外, 每一圈的数字就组成这个数列, 等等. 在量子力学中, 粒子纠缠态、量子临界点研究也离不开这个数列. 斐波那契数列 $\{a_n\}$ 的第一项和第二项都是 1, 第三项起每一项都等于它前两项的和, 则

- A. $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2022} = a_{2023}$
B. $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2023} = a_{2024}$
C. $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{2023}^2 = a_{2023} a_{2024}$
D. $\frac{1}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_2 a_4} + \frac{1}{a_3 a_5} + \dots + \frac{1}{a_{2021} a_{2023}} = \frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_{2022} a_{2023}}$



12. 在封闭的四棱锥 $P-ABCD$ 内有一个半径为 r 的球, $ABCD$ 为正方形, $\triangle PAD$ 的面积为 1, $PA=PD$, 则
- A. PA 的最小值为 $\sqrt{2}$
- B. 该球球面不能与该四棱锥的每个面都相切
- C. 若 $PA \perp AB$, 则 r 的最大值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- D. 若 $PA=PB$, 则 r 的最大值为 $\sqrt{2}-1$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 $P(A)=0.6$, $P(B|A)=0.5$, $P(B|\bar{A})=0.2$, 那么 $P(B)=$ _____.

14. 2^{28} 除以 7 所得余数为_____.

15. 计算器计算 e^x , $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$ 等函数的函数值, 是通过写入“泰勒展开式”程序的芯片完成的.“泰勒展开式”是: 如果函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间 (a, b) 内可以多次进行求导数运算, 则当 $x \in (a, b)$, 且 $x \neq x_0$ 时, 有

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots$$

其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数, $f''(x)$ 是 $f'(x)$ 的导数, $f'''(x)$ 是 $f''(x)$ 的导数…….

取 $x_0=0$, 则 $\sin x$ 的“泰勒展开式”中第三个非零项为_____, $\sin 1$ 精确到 0.01 的近似值为_____. (本题第一空 2 分, 第二空 3 分.)

16. 经过坐标原点 O 的直线与椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 相交于 A, B 两点, 过 A 垂直于 AB 的直线与 C 交于点 D , 直线 DB 与 y 轴相交于点 E , 若 $\vec{OB} \cdot \vec{OE} = 2|\vec{OE}|^2$, 则 C 的离心率为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

$\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\sin^2 A > \sin^2 B + \sin^2 C$

(1) 证明: $\triangle ABC$ 是钝角三角形;

(2) 在四个条件① $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $b = 2$ ④ $c = \sqrt{2}$ 中, 哪三个条件同时成立能使 $\triangle ABC$ 存在? 请说明理由.

18. (12分)

网民对一电商平台的某种特色农产品销售服务质量进行评价，每位参加购物网民在“好评、中评、差评”中选择一个进行评价，在参与评价的网民中抽取2万人，从年龄分为“50岁以下”和“50岁以上(含50岁)”两类人群进行了统计，得到给予“好评、中评、差评”评价人数如下表所示.

网民年龄	好评人数	中评人数	差评人数
50岁以下	9000	3000	2000
50岁以上(含50岁)	1000	2000	3000

(1) 根据这2万人的样本估计总体，从参与评价网民中每次随机抽取1人，如果抽取到“好评”，则终止抽取，否则继续抽取，直到抽取到“好评”，但抽取次数最多不超过5次，求抽取了5次的概率；

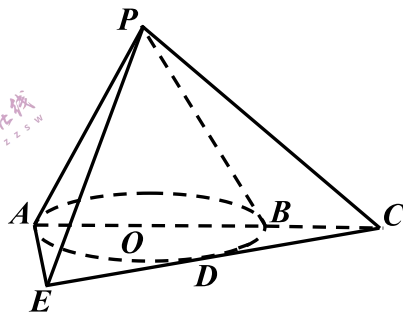
(2) 从给予“中评”评价的网民中，用分层抽样的方法抽取10人，再从这10人中随机抽取3人，抽取的3人中年龄在50岁以下的人数为 X ，求 X 的分布列和数学期望.

19. (12分)

如图， PA, PB 是圆锥的母线，延长底面圆 O 直径 AB 到点 C ，使得 $BC=OB$ ，直线 CE 与圆 O 切于点 D ，已知 $AB=2$ ，二面角 $P-EC-A$ 的大小为 60° .

(1) 求该圆锥的侧面积；

(2) 若平面 $PAE \perp$ 平面 PAC ，求三棱锥 $P-AEC$ 的体积.



20. (12分)

S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $S_n = 3 - a_n - n^2$.

(1) 证明: $a_n = 3 - 2n$;

(2) 保持数列 $\{a_n\}$ 中各项先后顺序不变，在 a_k 与 a_{k+1} 之间插入数列 $\{(n+1) \cdot 2^n\}$ 的前 k 项，使它们和原数列的项构成一个新的数列:

$$a_1, 2 \cdot 2^1, a_2, 2 \cdot 2^1, 3 \cdot 2^2, a_3, 2 \cdot 2^1, 3 \cdot 2^2, 4 \cdot 2^3, a_4, \dots$$

求这个新数列的前 50 项和.

21. (12分)

已知 O 为坐标原点, $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$ 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点, P 为 C 的右支上一点, 当 $PF \perp x$ 轴时, $|OP| = \sqrt{13}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若 P 异于 C 的右顶点 A , 点 Q 在直线 $x = \frac{1}{2}$ 上, $AP \parallel OQ$, M 为 AP 的中点, 直线 OM 与直线 QF_2 的交点为 N , 求 $|NF_1|$ 的取值范围.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x} + a \ln x$, $a > \frac{1}{3}$

(1) 当 $a = \frac{3}{8}$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有三个不同的零点 x_1, x_2, x_3 , 求 a 的取值范围, 并证明:

$$3 < x_1 + x_2 + x_3 < \frac{3-3a}{3a-1}.$$