2023 届高中数学高三（文科）参考答案

一.　　　　　　　　选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	B	D	B	A	D	A	D	A	B	C	C

二．填空题

13. $a_n=2n-5$

14. 3

15. $\dfrac{\sqrt{31}}{8}$

16. -1

三．解答题

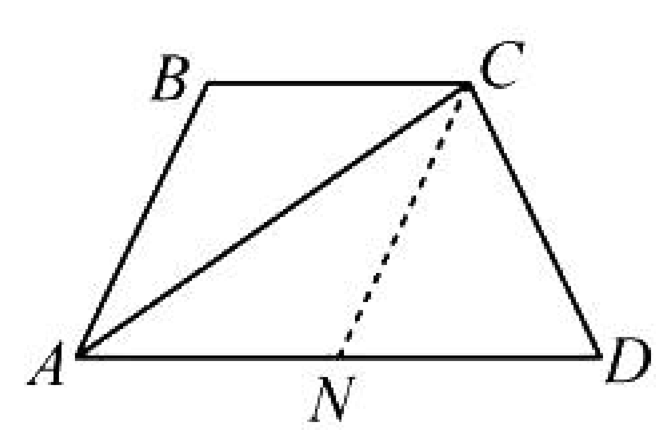
17. 解：(1) $\because \tan B+\tan C=\dfrac{2\sin A}{\cos C}$　$\therefore \dfrac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{\cos B\cos C}=\dfrac{2\sin A}{\cos C}$

又 $\because \sin B\cos C+\cos B\sin C=\sin A$　$\therefore \cos B=\dfrac{1}{2}$

$\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$

(2) $\because \Delta ABC$ 是钝角三角形，又 $\because B=\dfrac{\pi}{3}$ 且 $a>c$，$\therefore$ 角 A 为钝角

$$\therefore \begin{cases} a^2>b^2+c^2 \\ b^2=a^2+c^2-ac \\ a=c+2 \end{cases} \Rightarrow \quad c>2$$



18. (1) 证明：在梯形 $ABCD$ 中取 AD 得中点 N，连接 CN,

则由 BC 平行且等于 AN，可知 ABCN 为平行四边形，

所以 CN=AB,由 $CN=\dfrac{1}{2}AD$ 可得 C 点在以 AD 为直径的圆上，

所以 $AC\perp CD$

$AD=4, CD=2, AC=2\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} AC\perp CD \\ PA\perp CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD\perp 面PAC$$

$\Rightarrow 面PAC\perp 面ACD$

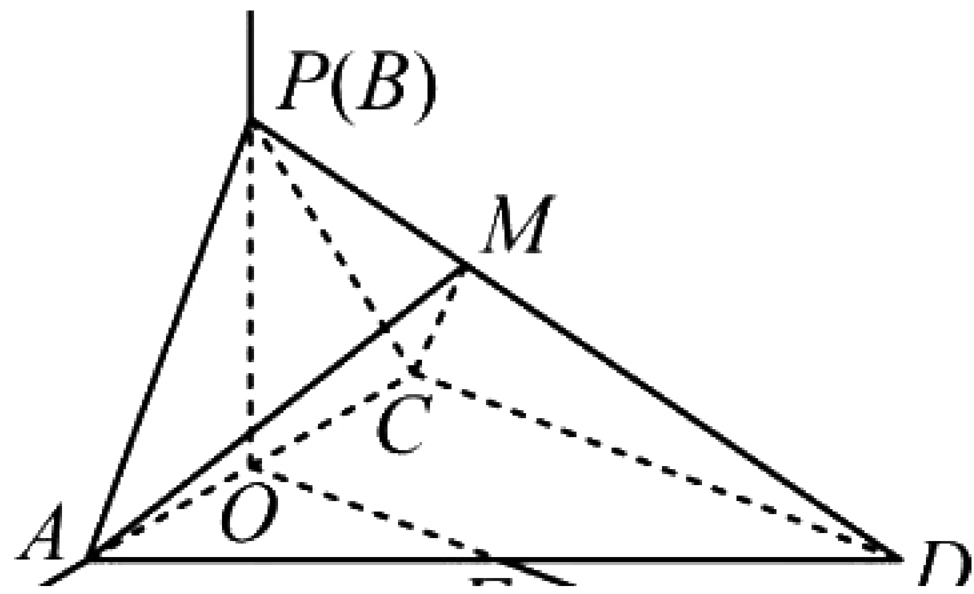
(2) $CD\perp 面PCA \Rightarrow CD\perp PC$

M 为中点 $\Rightarrow MC=\sqrt{2}$

$PO\perp$ 面 $ACD\Rightarrow PO\perp OD$

$OM=\sqrt{2}$ ΔOCM 为等腰三角，即 $S_{OCM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

$S_{ACM}=2S_{OCM}=\frac{\sqrt{15}}{2}$



$V_{P-ACM}=V_{M-ACP}\Rightarrow\frac{1}{3}\cdot h\cdot\frac{\sqrt{15}}{2}=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\sqrt{3}$

$h=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

19. 解：依题意可得 $\begin{cases}m+0.015=2n\\(0.015+n+m+0.015+0.01)\times 10=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}m=0.035\\n=0.025\end{cases}$，

所以理科学生得分的平均值为：

$(55\times 0.015+65\times 0.025+75\times 0.035+85\times 0.015+95\times 0.01)\times 10=73$

（2）解：理科学生中得分为优秀的有 $600\times(0.015+0.01)\times 10=150$（人），

所以 2×2 列联表如下所示

	优秀	不优秀	合计
理科生	150	450	600
文科生	50	350	400
合计	200	800	1000

所以 $K^2=\frac{1000(150\times 350-50\times 450)^2}{600\times 400\times 200\times 800}=23.4375>10.828$，

所以有 99.9% 以上的把握认为，得分是否优秀与文理科有关；

20. （1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，

（2）由题意知, $F(-1,0)$，

设直线 MN 方程：$x=my-1, M(x_1,y_1), N(x_2,y_2), E(-4,y_1)$,

联立方程 $\begin{cases} x=my-1 \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，得 $(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，

所以 $y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4}, y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$，

所以 $-2my_1y_2=3(y_1+y_2)$，

又 $k_{EN}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2+4}$，

所以直线 EN 方程为：$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2+4}(x+4)$，

令 $y=0$，则 $x=-4-\dfrac{y_1(x_2+4)}{y_2-y_1}=-4-\dfrac{my_1y_2+3y_1}{y_2-y_1}=-4+\dfrac{\frac{3}{2}(y_1-y_2)}{y_2-y_1}=-4+\dfrac{3}{2}=-\dfrac{5}{2}$.

所以直线 EN 过定点 $\mathrm{P}\left(-\dfrac{5}{2},0\right)$.

21. 解：（1）当 $a=3$ 时，对任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 $\ln x+x-3+\dfrac{b}{x}\geq 0$ 恒成立

$\because x>0$ $\quad\therefore b\geq -x\ln x-x^2+3x$ 恒成立 $\quad$ 令 $g(x)=-x\ln x-x^2+3x$

$\therefore g'(x)=-\ln x-2x+2$ $\quad\therefore g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减 $\quad$ 又 $\because g'(1)=0$

$\therefore$ 在 $(0,1)$ 上 $g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增

$\therefore$ 在 $(1,+\infty)$ 上 $g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减

$\therefore g(x)$ 在 $x=1$ 时取最大值 $g(1)=2$ $\quad\therefore\ b\geq 2$

（2）对任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 $\ln x+x-a+\dfrac{b}{x}\geq 0$ 恒成立

令 $h(x)=x\ln x+x^2-ax+b$ $\quad\therefore\ h'(x)=\ln x+1+2x-a$

$\therefore h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

取 $t>1$ 且 $t>\dfrac{a}{2}-1$，则 $\ln t>0$ 且 $1+2x-a>0$，$\therefore h'(t)>0$

取 $0<s<1$ 且 $s<e^{a-3}$，则 $\ln s<a-3$ 且 $1+2x-a<3-a$，$\therefore h'(s)<0$

$\therefore$存在$m\in(s,t)$，使$h'(m)=\ln m+1+2m-a=0$，又$\because h'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

则$h(x)$在$(0,m)$上递减，在$(m,+\infty)$上递增，

$\therefore h(x)$在$x=m$取得最小值$h(m)=m\ln m+m^2-am+b$，其中$\ln m+1+2m=a$

$\therefore h(m)=m\ln m+m^2-(\ln m+1+2m)m+b\geq 0$

$\therefore b\geq m^2+m$

$\therefore$当$a>0$时，$\dfrac{a}{b+1}\leq\dfrac{\ln m+1+2m}{m^2+m+1}$

令$p(x)=\dfrac{\ln x+1+2x}{x^2+x+1}$

$$p'(x)=\frac{(\frac{1}{x}+2)(x^2+x+1)-(\ln x+1+2x)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{(2x+1)(-x+\frac{1}{x}-\ln x)}{(x^2+x+1)^2}$$

$\therefore$当$x\in(1,+\infty)$时，$p'(x)<0$，当$x\in(0,1)$时，$p'(x)>0$

$\therefore M\geq p(1)=1$

22.（1）由题知，由$\angle O_2ON=\dfrac{\pi}{3}$，可知$O_2O=ON=1$,可得点 N 的极角为$\dfrac{\pi}{3}+\pi=\dfrac{4\pi}{3}$，

所以 N 的极坐标为$\left(1,\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

（2）由题知$|OK|=2$，$|OM|=2\sin\theta,\theta\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，$\angle MOK=\theta-\dfrac{\pi}{3}$，

所以$S_{\triangle MOK}=\dfrac{1}{2}|OK|\cdot|OM|\times\sin\angle MOK$

$=\dfrac{1}{2}\times2\times2\sin\theta\times\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=\dfrac{1-\cos2\theta}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin2\theta$

$=\frac{1}{2}-\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)$

因为$\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以$2\theta+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{7\pi}{6},\frac{13\pi}{6}\right)$，

所以$S_{\triangle MOK}\in\left(0,\frac{3}{2}\right]$

23.（1）由$4a^2+b^2+16c^2=1.$，且c为正数，得$4a^2+b^2<1$，则$4ab<1$

（2）由$4ab<1$，

则$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{4abc^2}>\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$，

由柯西不等式可得：

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(4a^2+b^2+16c^2\right)\geq\left(\frac{1}{a}\times 2a+\frac{1}{b}\times b+\frac{1}{c}\times 4c\right)^2=49,$$

当且仅当$\sqrt{2}a=b=2c$时，等号成立，

所以$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{4abc^2}>49.$