

大联考长沙市一中 2024 届高三月考试卷(一)

数 学

时量:120 分钟 满分:150 分

得分 \_\_\_\_\_

一、选择题(本大题共 8 个小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设非空集合  $P, Q$  满足  $P \subseteq Q$ , 则下列表述正确的是

- A.  $\forall x \in Q$ , 有  $x \in P$                       B.  $\forall x \in P$ , 有  $x \in Q$   
C.  $\exists x \notin Q$ , 使得  $x \in P$                       D.  $\exists x \in P$ , 使得  $x \notin Q$

2. 设等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_{10} = 20, S_{20} = 10$ , 则  $S_{30} =$

- A. 5                      B. 15                      C. 25                      D. 35

3. 已知  $\tan \frac{\theta}{2} = 2$ , 则  $\cos \theta =$

- A.  $-\frac{4}{5}$                       B.  $-\frac{3}{5}$                       C.  $\frac{3}{5}$                       D.  $\frac{4}{5}$

4. 抛物线  $x = \frac{1}{4}y^2$  的焦点到双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的渐近线的距离是  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 则该双曲线的离心率为

- A.  $\sqrt{2}$                       B.  $\sqrt{3}$                       C. 2                      D.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

5. 已知非零向量  $a, b$ , 则下列命题错误的是

- A.  $|a \cdot b| \leq |a| |b|$   
B.  $|a+b| \leq |a| + |b|$   
C. 与向量  $a$  共线的单位向量为  $\frac{a}{|a|}$   
D. 记  $\frac{b}{|b|} = e$ , 则向量  $a$  在向量  $b$  上的投影向量为  $(a \cdot e)e$

6. 已知随机变量  $X$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$  有下列四个命题:

- 甲:  $p(X > m) = 0.5$ ;  
乙:  $p(X \leq m) = 0.5$ ;  
丙:  $p(m-1 < X < m) < p(m+1 < X < m+2)$   
丁:  $p(X > m+1) > p(X < m-2)$

如果只有一个假命题, 则该命题为

- A. 甲                      B. 乙                      C. 丙                      D. 丁

数学试题(一中版) 第 1 页(共 8 页)



C. 函数  $f(x)$  图象的对称中心为  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

D. 函数  $f(x)$  在  $x = \frac{\pi}{2}$  处的瞬时变化率最大

12. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$ , 且对任意的正整数  $m, n$ , 都有

$a_{2m} + a_{2n} = 2a_{m+n} + |m-n|$ , 则下列说法正确的有

A.  $a_4 = 5$

B. 数列  $\{a_{2n+2} - a_{2n}\}$  是等差数列

C.  $a_{2n} = 3n - 1$

D. 当  $n$  为奇数时,  $a_n = \frac{n^2 + 3}{4}$

三、填空题(本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知两圆  $C_1: x^2 + y^2 = 1, C_2: (x-1)^2 + (y-1)^2 = r^2 (r > 1)$ , 若圆  $C_1$  与圆  $C_2$  有且仅有两条公切线, 则  $r$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

14. 在等差数列  $\{a_n\}$  中, 若  $\frac{a_6}{a_5} < -1$ ; 且数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$  有最大值, 则使  $S_n > 0$  成立的正整数  $n$  的最大值是\_\_\_\_\_.

15. 已知函数  $f(x) = e^x - 2ax + a$ , 若  $f(x)$  恰有两个零点, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

16. 已知函数  $f(x) = \cos(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 < \varphi < \pi)$  的图象在  $y$  轴上的截距为  $\frac{1}{2}$ , 且在区间  $(\pi, 2\pi)$  上没有最值, 则  $\omega$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

四、解答题(本大题共 6 个小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 满足  $c^2 = ab$ ,  $CD$  为  $\triangle ABC$  的  $AB$  边上的中线, 且  $CD \cdot \sin \angle ACB = a \sin B$ .

(1) 求证:  $CD = c$ ;

(2) 求  $\cos \angle ACB$  的值.

18. (本小题满分 12 分)

设各项均不为零的数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1 = 1$ , 且对于任意  $n \in \mathbf{N}^*$ , 满足  $2S_n = a_n \cdot a_{n+1}$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

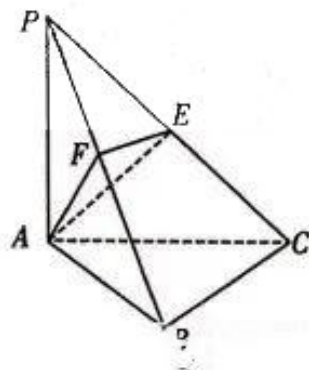
(2) 设  $b_n = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前 99 项和.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在三棱锥  $P-ABC$  中, 侧棱  $PA \perp$  底面  $ABC$ , 且  $PA = AC$ ,  $AC \perp BC$ , 过棱  $PC$  的中点  $E$ , 作  $EF \perp PB$  交  $PB$  于点  $F$ , 连接  $AE, AF$ .

(1) 证明:  $PB \perp$  平面  $AEF$ ;

(2) 若  $PA = 2$ , 三棱锥  $P-AEF$  的体积是  $\frac{\sqrt{2}}{6}$ , 求直线  $PC$  与平面  $AEF$  所成角的大小.



## 20. (本小题满分 12 分)

现有一种射击训练,每次训练都是由高射炮向目标飞行物连续发射三发炮弹,每发炮弹击中目标飞行物与否相互独立.已知射击训练有 I, II 两种型号的炮弹,对于 I 型号炮弹,每发炮弹击中目标飞行物的概率为  $p(0 < p \leq 0.4)$ ,且击中一弹目标飞行物坠毁的概率为 0.6,击中两弹目标飞行物必坠毁;对于 II 型号炮弹,每发炮弹击中目标飞行物的概率均为  $q(0 < q < 1)$ ,且击中一弹目标飞行物坠毁的概率为 0.4,击中两弹目标飞行物坠毁的概率为 0.8,击中三弹目标飞行物必坠毁.

- (1)在一次训练中,使用 II 型号炮弹,求  $q$  满足什么条件时,才能使得至少有一发炮弹击中目标飞行物的概率不低于 0.936?
- (2)若  $p+q=1$ ,试判断在一次训练中选用 I 型号炮弹还是 II 型号炮弹使得目标飞行物坠毁的概率更大?

## 21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  左焦点为  $F$ ,点  $F$  到椭圆  $C$  上的点的距离最小值是 1,离心率为  $\frac{1}{2}$ .

- (1)求椭圆  $C$  的方程;
- (2)设点  $P(4,0)$ ,  $A, B$  是椭圆上关于  $x$  轴对称的两点,  $PB$  交椭圆  $C$  于另一点  $E$ ,求  $\triangle AEF$  的内切圆半径的范围.



22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = e^{x+a}$ ,  $g(x) = \ln(x+1)$ ,  $a \in \mathbf{Z}$ .

(1) 若  $a = -1$ , 求证:  $f(x) > g(x)$ ;

(2) 若函数  $f(x)$  与函数  $g(x)$  存在两条公切线, 求整数  $a$  的最小值.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: [www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线