

(在此卷上答题无效)

2023年5月福州市普通高中毕业班质量检测

数学试题

(完卷时间 120 分钟; 满分 150 分)

友情提示: 请将所有答案填写到答题卡上! 请不要错位、越界答题!

第 I 卷

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{2, 3, 5, 7, 8\}$, $B = \{1, 5, a, 8, 9\}$, 若 $A \cap B = \{3, 5, 8\}$, 则 $a =$

- A. 2 B. 3 C. 6 D. 7

2. 在复平面内, 复数 $\frac{1}{z}$ 对应的点位于第二象限, 则复数 z 对应的点位于

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 已知向量 b 在单位向量 a 上的投影向量为 $-4a$, 则 $(a + b) \cdot a =$

- A. -3 B. -1 C. 3 D. 5

4. 为落实党的二十大提出的“加快建设农业强国, 扎实推动乡村振兴”的目标, 银行拟在乡村开展小额贷款业务. 根据调查的数据, 建立了实际还款比例 P 关于贷款人的年收入 x (单位: 万元) 的 Logistic 模型: $P(x) = \frac{e^{-0.9680+0.1x}}{1+e^{-0.9680+0.1x}}$. 已知当贷款人的年收入为 8 万元时, 其实际还款比例为 50%. 若银行希望实际还款比例为 40%, 则贷款人的年收入为 (精确到 0.01 万元, 参考数据: $\ln 3 \approx 1.0986$, $\ln 2 \approx 0.6931$)

- A. 4.65 万元 B. 5.63 万元 C. 6.40 万元 D. 10.00 万元

5. 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 1, $A = \frac{\pi}{3}$, 则 $AC \cdot \cos C + AB \cdot \cos B =$

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\sqrt{3}$

6. “赛龙舟”是端午节重要的民俗活动之一, 登舟比赛的划手分为划左桨和划右桨. 某训练小组有 6 名划手, 其中有 2 名只会划左桨, 2 名只会划右桨, 2 名既会划左桨又会划右桨. 现从这 6 名划手中选派 4 名参加比赛, 其中 2 名划左桨, 2 名划右桨, 则不同的选派方法共有

- A. 15 种 B. 18 种 C. 19 种 D. 36 种

高三数学 — 1 — (共 4 页)

7. 已知 m, n 为异面直线, $m \perp$ 平面 α , $n \perp$ 平面 β . 若直线 $l \perp m, l \perp n, l \not\subset \alpha, l \not\subset \beta$, 则
- A. $\alpha \parallel \beta, l \parallel \alpha$ B. $\alpha \perp \beta, l \perp \beta$
C. α 与 β 相交, 且交线垂直于 l D. α 与 β 相交, 且交线平行于 l
8. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = e^{a(x-1)}, g(x) = -x^2 + (a+2)x + 2b$. 若 $f(x) > g(x)$, 则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是
- A. $(-\infty, -\frac{2}{e})$ B. $(-\infty, -1)$ C. $(-\infty, -\frac{1}{2})$ D. $(-\frac{2}{e}, 0)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知互不相同的 9 个样本数据, 若去掉其中最大和最小的数据, 则剩下的 7 个数据与原 9 个数据相比, 下列数字特征中不变的是
- A. 中位数 B. 平均数 C. 方差 D. 第 40 百分位数
10. 已知椭圆 $C: px^2 + qy^2 = r$, 其中 p, q, r 成公比为 2 的等比数列, 则
- A. C 的长轴长为 2 B. C 的焦距为 $2\sqrt{2}$
C. C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. C 与圆 $(x-3)^2 + y^2 = 1$ 有 2 个公共点

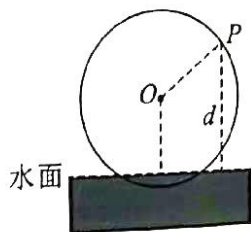
11. 如图, 一个半径为 3 m 的筒车, 按逆时针方向匀速旋转 1 周. 已知盛水筒 P 离水面的最大距离为 5.2 m, 旋转一周需要 60 s. 以 P 刚浮出水面时开始计算时间, P 到水面的距离 d (单位: m) (在水面下则 d 为负数) 与时间 t (单位: s) 之间的关系为 $d = A \sin(\omega t + \varphi) + K$ ($A > 0, \omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$), $t \in [0, 60]$, 下列说法正确的是

A. $K = 2.2$

B. $\omega = \frac{\pi}{30}$

C. $\sin \varphi = \frac{2.2}{3}$

D. P 离水面的距离不小于 3.7 m 的时长为 20 s



12. 已知函数 $f(x)$ 定义域为 \mathbf{R} , 满足 $f(x+2) = \frac{1}{2}f(x)$, 当 $-1 \leq x < 1$ 时, $f(x) = |x|$. 若函数

$y = f(x)$ 的图象与函数 $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left[\frac{x+1}{2}\right]}$ ($-2023 \leq x \leq 2023$) 的图象的交点为 (x_1, y_1) ,

$(x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, (其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数), 则

A. $g(x)$ 是偶函数

B. $n = 2024$

C. $\sum_{i=1}^n x_i = 0$

D. $\sum_{i=1}^n y_i = 2^{1012} - 2^{-1011}$

第 II 卷

注意事项:

用 0.5 毫米黑色签字笔在答题卡上书写作答. 在试题卷上作答, 答案无效.

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知变量 x 和 y 的统计数据如下表:

x	6	7	8	9	10
y	3.5	4	5	6	6.5

若由表中数据得到经验回归直线方程为 $\hat{y}=0.8x+\hat{a}$, 则 $x=10$ 时的残差为_____.

(注: 观测值减去预测值称为残差).

14. 写出经过抛物线 $y^2=8x$ 的焦点且和圆 $x^2+(y-1)^2=4$ 相切的一条直线的方程_____.

15. 已知圆台上、下底面的圆周都在一个直径为 10 的球面上, 其上、下底面半径分别为 4 和 5, 则该圆台的侧面积为_____.

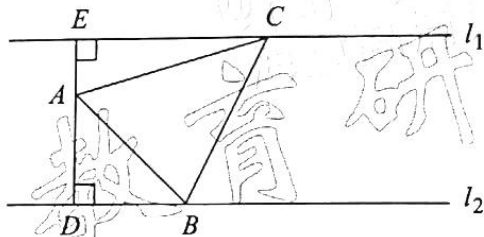
16. 不等式 $x < \sin \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{6}$ 的解集为_____.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

如图, 直线 $l_1 \parallel l_2$, 线段 DE 与 l_1, l_2 均垂直, 垂足分别是 E, D , 点 A 在 DE 上, 且 $AE=1$,

$AD=2$. C, B 分别是 l_1, l_2 上的动点, 且满足 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$. 设 $\angle ABD = x$, $\triangle ABC$ 面积为 $S(x)$.



(1) 写出函数解析式 $S(x)$;

(2) 求 $S(x)$ 的最小值.

18. (12 分)

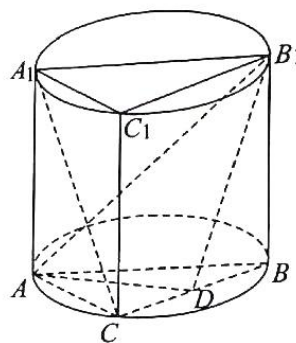
学校有 A, B 两家餐厅, 周同学每天午餐选择其中一家餐厅用餐. 第 1 天午餐选择 A 餐厅的概率是 $\frac{1}{3}$, 如果第 1 天去 A 餐厅, 那么第 2 天去 A 餐厅的概率为 $\frac{3}{5}$; 如果第 1 天去 B 餐厅, 那么第 2 天去 A 餐厅的概率为 $\frac{3}{4}$.

(1) 记周同学前两天去 A 餐厅的总天数为 X , 求 X 的数学期望;

(2) 如果周同学第 2 天去 B 餐厅, 那么第 1 天去哪个餐厅的可能性更大? 请说明理由.

19. (12分)

如图, 四边形 A_1ABB_1 是圆柱的轴截面, CC_1 是母线, 点 D 在线段 BC 上, 直线 $A_1C \parallel$ 平面 AB_1D .



(1) 记三棱锥 B_1-ABD 的体积为 V_1 , 三棱锥 B_1-ABC 的体积为 V_2 , 证明: $V_2 = 2V_1$;

(2) 若 $CA=2$, $CB=4$, 直线 A_1C 到平面 AB_1D 的距离为 $\frac{4}{3}$,

求直线 CC_1 与平面 AB_1D 所成角的正弦值.

20. (12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} + a_n + 10 = 2a_{n+1} + 2n$.

(1) 若 $b_n = a_{n+1} - a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求使 a_n 取得最小值时 n 的值.

21. (12分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右顶点为 A , O 为原点, 点 $P(1, 1)$ 在 C 的渐近线上, $\triangle PAO$ 的面积为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过点 P 作直线 l 交 C 于 M, N 两点, 过点 N 作 x 轴的垂线交直线 AM 于点 G , H 为 NG 的中点, 证明: 直线 AH 的斜率为定值.

22. (12分)

已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = (x-a-1)e^{x-1}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 在 $(-\infty, b)$ 上的单调性;

(2) 已知点 $P(m, m)$.

(i) 若过点 P 可以作两条直线与曲线 $y = e^{x-1} + 1 (-1 < x < 3)$ 相切, 求 m 的取值范围;

(ii) 设函数 $h(x) = \begin{cases} e^{x-1} + 1, & -1 < x < 1, \\ \ln(x-1) + 1, & 1 + e^{-2} < x < 1 + e^2. \end{cases}$ 若曲线 $y = h(x)$ 上恰有三个点

$T_i (i=1, 2, 3)$ 使得直线 PT_i 与该曲线相切于点 T_i , 写出 m 的取值范围(无需证明).

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线



自主选拔在线
微信号: zizzsw



自主选拔在线
微信号: zizzsw



自主选拔在线
微信号: zizzsw