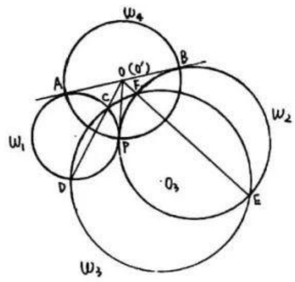
2018年北大金秋营试题解答

第一天

1. 圆 w_1 圆 w_2 外切于点 P，外公切线 AB 切圆 w_1 于点 A，切圆 w_2 于点 B，作圆 w_3，使点 P 在圆 w_3 内且圆 w_3 与 AB 相离.设圆 w_3 与圆 w_1 交于点 C,D，圆 w_3 与圆 w_2 交于点 E,F，求证：圆 w_3 与以 AB 为直径的圆正交的充要条件是 CD,EF,AB 共点。



证明：设圆 w_3 的圆心为点 O_3，以 AB 为直径的圆为圆 w_4.再设圆 w_1 与圆 w_2 的内公切线交 AB 于点 O.

则由 $OA=OP=OB$ 可知 O 是圆 w_4 的圆心，且点 P 在圆 w_4 上，对圆 w_1、w_2、w_3 由根心定理可知 CD、EF、PO 三线共点，设公共点为 O'

（1）若 CD、EF、AB 三线共点，则 $O'=O$.

于是 $OP^2=OC\bullet OD\Rightarrow R_4^2=OO_3^2-R_3^2$，其中 R_3,R_4 分别表示圆 w_3,w_4 的半径，因此，圆 w_3 与圆 w_4 正交.

（2）若圆 w_3 与圆 w_4 正交.，则 $OP^2=OO_3^2-R_3^2$

又Q $O'P^2=O'C\bullet O'D=O'O_3^2-R_3^2$　　$\therefore O'P^2-OP^2=O'O_3^2-OO_3^2$　　①

当 $O'\neq 0$ 时，由①式可知 $O'O\perp PO_3\Rightarrow OP\perp PO_3$

因此以 O_3 圆心，O_3P 为半径的圆 w_3' 与圆 w_3 正交，从而圆 w_3' 与圆 w_3 重合，这与 P 在圆 w_3 内矛盾，故 $O'=O$

即 CD,EF,AB 三线共点，

2.设 S 为所有大于等于 2018 的正整数组成的集合，求所有函数 $f:S\to Z$，使得对任意的 $i,j\in S,(i+j)[f(i)+f(j)]-4f(i)f(j)$ 为完全平方数.

解：$f(x)=x,\forall x\in S,f(x)=0,\forall x\in S.$

取 $i=j=p$（p为$4k-1$型素数且$p\in S$）则 $4pf(p)-4(f(p))^2$ 为完全平方数，由此

可设 $pf(p)-(f(p))^2=m^2(m\in Z)$

于是 $p^2=(2m)^2+(p-2f(p))^2$，而$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}=-1$，$-1$不是$p$二次剩余，

因此 $p|2m,\ p|(p-2f(p))$，从而$f(p)\in\{0,p\}$

由此可知对于任意的素数，$p\in S$且$p=-1(\bmod 4)$有$f(p)\in\{0,p\}$，(*)

（1）当存在两个不同的$4k-1$型素数$p_1,p_2\in S$，使得$f(p_1)=0,\ f(p_2)=0$时，

对于任意 $a\geq\frac{1}{4}(p_1-p_2)^2$ 且$a\in S$，取$(i,j)=(p_1,a)(p_2,a)$可知：

$(p_1+a)f(a)$，$(p_2+a)f(a)$都为完全平方数，

因此$(p_1+a)(p_2+a)(f(a))^2$是完全平方数，

而 $(2a+p_1+p_2-1)^2<4(p_1+a)(p_2+a)=(2a+p_1+p_2)^2-(p_1-p_2)^2<(2a+p_1+p_2)^2$

所以$(p_1+a)(p_2+a)$不是完全平方数，故 $f(a)=0$

若$\frac{1}{4}(p_1-p_2)^2\leq 2018$，则$f(x)=0,\forall x\in S$

若$\frac{1}{4}(p_1-p_2)^2>2018$，对任意的$b\in\left[2018,\frac{1}{4}(p_1-p_2)^2\right]$且$b\in S$，

设$c\geq\frac{1}{4}(p_1-p_2)^2$ 且$c\in S$，分别取$(i,j)=(b,c),(b,c+2)$，由$f(c)=0,\ f(c+2)=0$ 可知：

$(b+c)f(b)$，$(b+c+2)f(b)$都为完全平方数，因此$(b+c)(b+c+2)(f(b))^2$是完全平方数，

而$(b+c)(b+c+2)=(b+c+1)^2-1$不是完全平方数，故 $f(b)=0$，

从而 $f(x)=0,\forall x\in S$

（2）当恰有一个$4k-1$型素数$p\in S$，满足$f(p)=0$时.

设素数$q\in S$且$q=-1(\bmod 4)$，$q\neq p$则由(*)知$f(q)=q$

取$(i,j)=(p,q)$可得$(p+q)q$是完全平方数，再由 p,q 为素数可知

$q|(p+q)\Rightarrow q|p$，这与$q\neq p$矛盾，这种情况不存在。

（3）对于所有的 $4k-1$ 型素数 $p\in S$，满足 $f(p)=p$.

设 $t\in S$，取 $4k-1$ 型素数 $p\in S$，且 $4p>|(t-f(t))(t-9f(t))|+|2t+1-6f(t)|$

再取 $(i,j)=(t,p)$ 可知 $(t+p)(f(t)+p)-4f(t)p$ 为完全平方数

而 $4[(t+p)(f(t)+p)-4f(t)p]=(2p+t-3f(t))^2-(t-f(t))(t-9f(t))$

再由素数 p 的选取可知

$(2p+t-3f(t)-1)^2<(2p+t-3f(t))^2-(t-f(t))(t-9f(t))<(2p+t-3f(t)+1)^2$

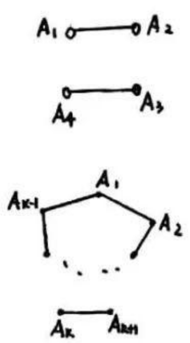
因此 $4[(t+p)(f(t)+p)-4f(t)p]=(2p+t-3f(t))^2$

解得 $f(t)=t$

此时 $f(x)=x,\forall x\in S$.

显然，$f(x)=0,\forall x\in S,f(x)=x,\forall x\in S$ 符合题意.

3.一个非增的非负整数序列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 称为 D^- 唯一的;若存在唯一的 n 阶简单图，使得个顶点的度数分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$（唯一是定义在同构概念下的）



证明：当 $n\geq 3$ 时，这样的序列个数不小于 $3\times 2^{n-2}-2$ 个

证明：当 $n=3$ 时，$(a_1,a_2,a_3)=$（2，2，2）、（2，1，1）.（1，1，0）.（0，0，0）此时由 4 个符合题意的序列

假设对于正整数 $k\geq 3$，符合题意的序列个数不小于 $3\times 2^{k-2}-2$ 个，对于 $k+1$ 阶简单图，若有一个顶点的度数为 k（即它与其余顶点都有边），则此时对应的 D^- 唯一的序列至少有 $3\times 2^{k-2}-2$ 个

再考虑 $k+1$ 阶简单图中，没有顶点的度数为 k，也没有顶点的度数为 0 的情况，这时 $(a_1,a_2,\cdots a_{k+1})=(2,2,\cdots 2)$ 是 D^- 唯一的，

若 $k=3,(a_1,a_2,a_3,a_4)=(1,1,1,1)$ 是 D^- 唯一的，

若 $k\geq 4,(a_1,a_2,\cdots,a_{k-1},a_k,a_{k+1})=(2,2,\cdots 2,1,1)$ 是 D^- 唯一的。故在此种情况下至少有 2 个 D^- 唯一的。因此对于 $k+1$，至少有 $2\times(3\times 2^{k-2}-2)+2=3\times 2^{k-1}-2$ 个 D^- 唯一的序列。

故对于任意 $n\ge 3$, 符合题意的序列个数不小于 $3\times 2^{n-2}-2$ 个。

4.给定整数 $n\ge 2$, 求最小的正实数 λ，使得对任意的非负实数 $a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n\ge 0$, 有

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_1+a_2+\cdots+a_k-k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_n}\right)^2\le \lambda\sum_{k=1}^{n}a_k^2$$

解：λ 的最小值是 $\left[\frac{n^2}{4}\right]$

当 n 为偶数时，设 $n=2m$, 取 $a_1=a_2=\cdots=a_m=1, a_{m+1}=a_{m+2}=\cdots=a_{2m}=0$ 代入 $(*)$ 式中

可得 $\lambda\ge m^2=\frac{n^2}{4}$

当 n 为奇数时，设 $n=2m+1$ 取 $a_1=a_2=\cdots=a_m=1, a_{m+1}=a_{m+2}=\cdots=a_{2m+1}=0$ 代入 $(*)$

式中可得 $\lambda\ge m(m+1)=\frac{n^2-1}{4}$

下面证明，对任意的非负实数 $a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n\ge 0$, 有

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_1+a_2+\cdots+a_k-k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_n}\right)^2\le\left[\frac{n^2}{4}\right]\sum_{k=1}^{n}a_k^2 \qquad (*)$$

$\because a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n\ge 0,\quad \therefore \sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\ge a_k$

记 $b_i=a_i-a_{i+1}(i=1,2,\cdots,n-1)$

则 $\sum_{k=1}^{n}\left(a_1+a_2+\cdots+a_k-k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_n}\right)^2\le\sum_{k=1}^{n}\left(a_1+a_2+\cdots+a_k-ka_k\right)^2$

$=\sum_{k=2}^{n}\left(b_1+2b_2+\cdots+(k-1)b_{k-1}\right)^2$

$=\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\bullet i^2b_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n-1}(n-j)ijb_ib_j$

因此 $\left[\frac{n^2}{4}\right]\sum_{k=1}^{n}a_k^2-\sum_{k=1}^{n}\left(a_1+a_2+\cdots+a_k-k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_n}\right)^2$

$$\geq \sum_{i=1}^{n-1} i\left(\left[\frac{n^2}{4}\right]-i(n-i)\right)b_i^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n-1} i\left(\left[\frac{n^2}{4}\right]-j(n-j)\right)b_ib_j\geq 0$$（Q $i,n-i$ 都是整数，$\therefore i(n-i)\leq\left[\frac{n^2}{4}\right]$ 同样 $j(n-j)\leq\left[\frac{n^2}{4}\right]$）$(*)$式成立，故 $\lambda_{\min}=\left[\frac{n^2}{4}\right]$

2018 年北大金秋营试题解答

第二天

1.2018 名学生围成一圈。称一个男生是"优秀的",如果他的两边都是女生; 称一个女生是'优秀的",如果她的两边都是男生。求优秀的男生数和的秀的女生数的平方差的最大值.

解:所求的最大值是 509040.

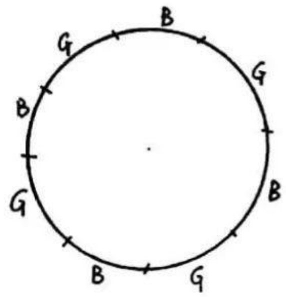
如果这 2018 名学生的性别都相同.则没有优秀的男生也没有优秀的女生。

下面考虑这 2018 名学生中既有男生又有女生的情况，

按顺时针方向处这 2018 名学生进行分段，

使得每一段中的学生都同性别，相邻两段的性别相反，

若一段同为男生,则称这一段为 B 段,若一段同为女生。则称这一段为 G 段(如图-).那么 B 段和 G 段的个数相同.



图一

注意到,如果存在一个 B 段包含的男生个数大于 1,我们保留该 B 段中按顺时针方向的第一个男生。对其余的男生用相同个数的女生(新添加)替换他们。那么此时优秀的男生数增加一个。优秀的女姓数不增.这样优秀的男生数和优秀的女生数的平方差增多。

而优秀的男生数与优秀的女生数都是有限值，它们的平方变也是有限值。因此题中的最大值是存在的。再结合前述分述可知,当取到最大值时,所有的 B 段都恰包含一名男生,

设此时有 b 个男生(也就是有 b 个长为 1 的 B 段),则有 2018-b 个女生,记其中有 g 长为 1 的 G 段.

于是，此时有 b 个优秀的男生。g 个优秀的女生。

由于 B段和G段 的个数相同，所以至少有 $b-g$ 个 G 段的长等于 2，由此可知这一圈的人数

$\geq b+g+2(b-g)=3b-g$,即$2018\geq 3b-g\Rightarrow g\geq 3b-2018$

当$b\leq 672$时,$b^2-g^2\leq b^2\leq 672^2=451584$

当$b\geq 673$时，$g\geq 3b-2018>0$,此时$b^2-g^2\leq b^2-(3b-2018)^2$

$$=-8b^2+2\times 3\times 2018b-2018^2$$

$$=-8(b-756.75)^2+509040.5$$

$\leq -8\times(757-756.75)^2+509040.5$

$=509040$

当且仅当 $b=757, g=253$ 时可取到 509040，此时 757 个男生中间分别插入 $\underbrace{1,1,\cdots,1}_{253个}$，$\underbrace{2,2,\cdots,2}_{504个}$ 女生。

2. 若互素正整数 (n,k) 满足设 $n-k \mid n^{n^n}-k^{k^k}$，则称 (n,k) 为"好对"，证明：存在无穷多个好对，(n,k)，满足 $(n,1013k)=1$，且满足 $(n,1013k)=1$ 也是好对。

注：本题在考试中由于印刷疏漏，未加上 $n>k$ 这一条件改卷按无这一条件阅卷.上面写的题目基本上是考试的原题。

一下就 (1) 不加 $n>k$，(2) 加 $n>k$，(3) 加 $n>k>1$ 三种情形进行证明

（1）不加 $n>k$

这时取 $n=1$ 即可

（2）加 $n>k$

这时取 $k=1, n=1013+2^m\left(m\in Z^+\right)$ 即可。

此时 $(n,k)=\left(1013+2^m,1\right)$ 显然为"好对"

再来证明：$2^m \mid n^{n^n}-1013^{1013^{1013}}$（其中 $n=1013+2^m$）

Q $\left(1013,2^m\right)=1 \therefore$ 由欧拉定理可知 $1013^{\varphi\left(2^m\right)}\equiv 1\left(\bmod 2^m\right)$

即 $1013^{2m-1}\equiv 1\left(\bmod 2^m\right)$

从而 $n^n-1013^{1013}=1013^{1013+2^m}-1013^{1013}=1013^{1013}\times\left(1013^{2^m}-1\right)\equiv 0\left(\bmod 2^m\right)$ 进而可知

$\varphi\left(2^m\right) \mid n^n-1013^{1013}$，因此 $1013^{n^n-1013^{1013}}\equiv 1\left(\bmod 2^m\right)$

于是 $n^{n^n}-1013^{1013^{1013}}\equiv 1013^{n^n}-1013^{1013^{1013}}\equiv 1013^{1013^{1013}}\times\left(1013^{n^n-1013^{1013}}-1\right)\equiv 0\left(\bmod 2^m\right)$

故 $2^m \mid n^{n^n}-1013^{1013^{1013}}$，所以 $\left(1013+2^m,1013\right)$ 也是"好对"

（3）加入 $n>k>1$

记 $\gamma=s\bullet\varphi(253)+2=220s+2\left(s\in Z^+\right)$ 取 $k=\dfrac{1}{253}\left(2^{\gamma-2}-1\right)$，$n=2^\gamma+k$

（这是令 $n-k=2^\gamma$，$n-1013k=4$ 得到的）易知 n 与 k 互素，

先证 (n,k) 是"好对"

6

$\because k$是奇数，$\therefore (k,2^{\gamma})=1$，由欧拉定理可知 $k^{\varphi(2^{\gamma})}\equiv 1(\bmod 2^{\gamma})$

即 $k^{2^{\gamma-1}}\equiv 1(\bmod 2^{\gamma})$，

于是 $n^{n}-k^{k}=(2^{\gamma}+k)^{n}-k^{k}\equiv k^{k}-k^{k}\equiv k^{k}(k^{n-k}-1)\equiv k^{k}(k^{2^{\gamma}}-1)\equiv 0(\bmod 2^{\gamma})$

而 $\varphi(2^{\gamma})=2^{\gamma-1}$

所以 $\varphi(2^{\gamma})\mid n^{n}-k^{k}$，因此 $k^{n^{n}-k^{k}}\equiv 1(\bmod 2^{\gamma})$

从而 $n^{n^{n}}-k^{k^{k}}=(2^{\gamma}+k)^{n^{n}}-k^{k^{k}}\equiv k^{n^{n}}-k^{k^{k}}\equiv k^{k^{k}}(k^{n^{n}-k^{k}}-1)=0(\bmod 2^{\gamma})$

故 (n,k) 是“好对”

再证明：$(n,1013k)$ 是“好对”

记 $t=1013k$，也就是证明 $4\mid n^{n^{n}}-t^{t^{t}}$

$\because \gamma>2 \because n=2^{\gamma}+k\equiv k(\bmod 4)$，$t=1013k\equiv k(\bmod 4)$

$\because t,n$ 都是奇数 $\therefore n^{n},t^{t}$ 也都是奇数，从而 $n^{n}-t^{t}$ 为偶数，

于是 $t^{n^{n}-t^{t}}=t^{2q}=(t^{2})^{q}\equiv 1(\bmod 4)$，其中 $q=\dfrac{1}{2}(n^{n}-t^{t})$

因此 $n^{n^{n}}-t^{t^{t}}\equiv k^{n^{n}}-k^{t^{t}}\equiv k^{t^{t}}(k^{n^{n}-t^{t}}-1)\equiv 0(\bmod 4)$

故 $(n,1013k)$ 也是“好对”

由 s 是任意正整数可知，这种 (n,k) 有无穷多个。

3. 给定整数 $n>1$，正整数 m 和集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 满足对 $\forall 1\le i<j\le n$，$A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中恰有 $n-j+i$ 个集合含有 i,j，求 $\sum_{k=1}^{m}|A_k|^2$ 的最小值.

解：设子集 A_i 中有 x_i 个元素，$(i=1,2,\cdots,m)$

则集合 A_i 的二元子集有 $\binom{x_i}{2}$ 个，于是集合 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 的所有二元子集有 $\sum_{i=1}^{m}\binom{x_i}{2}$ 个，

又由题意可知集合 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 的二元子集总共有 $\sum_{1\le i<j\le n}(n-j+i)$ 个.

因此 $\sum_{i=1}^{m}\binom{x_i}{2}=\sum_{1\le i<j\le n}(n-j+i)$ $(*)$

而 $\sum_{1\le i<j\le n}(n-j+i)=n\binom{n}{2}-\sum_{1\le i<j\le n}(j-i)=n\binom{n}{2}-\sum_{k=1}^{n-1}k(n-k)$

$$=\frac{n^2(n-1)}{2}-\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$
$$=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

再由 $(*)$ 式可得 $\sum_{i=1}^{m}x_i^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{3}+\sum_{i=1}^{m}x_i$

下面证明：$\sum_{i=1}^{m}x_i\ge n^2-2$

对于任意的 $i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 由题意可知集合 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 集合中恰有 $n-1$ 个集合含有 $i,i+1$，因此元素 $i,i+1$，在集合 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中都至少出现了 $n-1$ 次，于是元素 $1,2,\cdots,n$ 在集合 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中都至少出现了 $n-1$ 次，

假设存在 $k\in\{2,3,\cdots n-1\}$ 使得 k 在集合 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中恰出现了 $n-1$ 次，而集合 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中恰有 $n-1$ 个集合含有 $k-1,k$.因此，包含元素 k 的集合必包含元素，$k-1$，又由 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中恰含有 k 个集合含有 k，n 可知：包含元素 k 的集合中有 k 个集合也包含元素 n，那么将会 k 个集合中同时包含元素 $k-1,n$，这与 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中恰有 $k-1$ 个集合包含 $k-1,n$，矛盾.

故假设不成立，即对任意的 $j\in\{2,3,\cdots n-1\}$，j 在集合 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中至少出现了 n 次.因此 $\sum_{i=1}^{m}x_i\ge 2(n-1)+(n-2)n=n^2-2$

从而 $\sum_{i=1}^{m}x_i^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{3}+\sum_{i=1}^{m}x_i\ge\frac{n(n-1)(2n-1)}{3}+n^2-2=\frac{2n^2+n-6}{3}$ $(*)$

当 $A_1=\{1,2,,3,\cdots,n\}$

当 $A_2=\{2,,3,\cdots,n\}$

8

当 $A_3=\{3,\cdots,n\}$

$\vdots$

$A_{n-1}=\{n-1,n\}$

$A_n=\{1,2\cdots n-1,\}$

$A_{n+1}=\{1,2\cdots n-2\}$

$\vdots$

$A_{2n-3}=\{1,2\}$时符合题意且$\sum_{i=1}^{m}x_i=n^2-2$

故$(*)$式中的等号可以取到

因此$\sum_{k=1}^{m}|A_k|^2$ 的最小值是$\frac{1}{3}(2n^3+n-6)$.

4. （Ⅰ）设为实数集。若对于函数 $f:R\to R$,满足$|f(x-y)|=|f(x)-f(y)|$. 证明：对 $\forall x,y\in R.f(x+y)=f(x)+f(y)$.

（Ⅱ）设 c 为复数集，若对于函数 $f:c-c$，满足$|f(x-y)|=|f(x)-f(y)|$, 证明或否定：对 $\forall x,y\in c,f(x+y)=f(x)+f(y)$.

（Ⅰ）证明：记$|f(x-y)|=|f(x)-f(y)|$为P（x,y）

由$P(x,x)$得$f(0)=0$,由$P(0,x)$得$|f(-x)|=|f(x)|$，$\forall x\in R$.

当f恒为0时 符合题意且 $f(x,y)=f(x)+f(y)\forall x,y\in R$,以下设$f$不恒为0.

下面先证明 $f(-x)=-f(x)\forall x\in R$

假设：存在 $a\in R$ 使得 $f(-a)=f(a)$,由$P(a,-a)$得$f(2a)=0$.

$P(x,2a)\Rightarrow|f(x-2a)|=|f(x)|\forall x\in R$ 于是

$$\begin{aligned}&|f(x)-f(y)|=|f(x-y)|=|f(2a+x-y)|=|f(x+a)-f(y-a)|\\&=||f(x)-f(-a)|-|f(y)-f(a)||=||f(x)-f(a)|-|f(y)-f(a)||\\&\le|(f(x)-f(a))-(f(y)-f(a))|=|f(x)-f(y)|\forall x,y\in R\end{aligned}$$

9

当且仅当 $(f(x)-f(a))\cdot(f(y)-f(a))\geq 0$ 时上式取等号。

因此，对于任意的 $x\in R$，$f(x)$ 恒大于等于 $f(a)$ 或 $f(x)$ 恒小于等于 $f(a)$①

又由 $|f(-x)-f(a)|=|f(-x)-f(-a)|=|f(a-x)|=|f(x-a)|=|f(x)-f(a)|$

以及①可知 $f(-x)=f(x)\forall x\in R$ 于是 $P(x,y)\Rightarrow f(2x)=0\forall x\in R$

从而 $f(x)=0\forall\in R$ 这与 f 不恒为0矛盾，故假设不成立。

即 $f(-x)=-f(x)\forall x\in R$.

再证明：$f(x+y)=f(x)+f(y)\forall x,y\in R$。

由 $P(x,-y)\Rightarrow|f(x+y)|=|f(x)-f(-y)|=|f(x)+f(y)|\forall x,y\in R$

因此对 $\forall x,y\in R$ 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 或 $f(x+y)=-(f(x)+f(y))$

假设：存在 $x_0,y_0\in R$ 使得 $f(x_0+y_0)=-f(x_0)-f(y_0)$ 且 $f(x_0+y_0)\neq 0$②

则 $|f(2x_0+y_0)|=|f(x_0+y_0)+f(x_0)|=|f(y_0)|$ ③

又由

$|f(2x_0+y_0)|=|f(2(x_0+y_0))-f(y_0)|,|f(2(x_0+y_0))|=2|f(x_0+y_0)|=2|f(x_0)+f(y_0)|$

可得 $|f(2x_0+y_0)|=|2f(x_0)+3f(y_0)|$ 或 $|2f(x_0)+f(y_0)|$④

结合③④得 $|f(y_0)|=|2f(x_0)+3f(y_0)|$ 或 $|f(y_0)|=|2f(x_0)+f(y_0)|$ ⑤

$f(y_0)=2f(x_0)+3f(y_0)\Rightarrow f(x_0)+f(y_0)=0$ 代入②式有 $f(x_0+y_0)=0$ 矛盾。

$f(y_0)=-2f(x_0)-3f(y_0)\Rightarrow f(x_0)+2f(y_0)=0\Rightarrow f(x_0+y_0)=f(y_0)$

$\Rightarrow|f(x_0)|=|f(x_0+y_0)-f(y_0)|=0\Rightarrow f(x_0)=0$

$f(y_0)=2f(x_0)+f(y_0)\Rightarrow f(x_0)=0$

$f(y_0)=-2f(x_0)-f(y_0)\Rightarrow f(x_0)+f(y_0)=0$ 代入②式有 $f(x_0+y_0)=0$ 矛盾。

故由⑤式可推出 $f(x_0)=0$

同样由 $|f(x_0+2y_0)|=|f(x_0)|=|f(2(x_0+y_0))-f(x_0)|$ 可推出 $f(y_0)=0$，

这与 $f(x_0)+f(y_0)=-f(x_0+y_0)\neq 0$ 矛盾。

故假设不成立，对$\forall x,y\in R, f(x+y)=f(x)+f(y)$

第（II）问还没想清楚，等以后完整的做出来后，再写个解答。

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信扫一扫，快速关注