2025届普通高等学校招生全国统一考试
高一联考
数学(人教版)参考答案

1. D 【解析】$z=-\frac{4i}{1-i}=-\frac{4i(1+i)}{(1+i)(1-i)}=-2i(1+i)=2-2i$,所以复数 z 在复平面内对应的点为$(2,-2)$,该点位于第四象限.故选D.

2. A 【解析】由 $C\subseteq A$ 可知,a,b 中有一个元素为4.因为 $A\cap B=\{1\}$,所以 a,b 中有一个元素为1,则 $A=\{1,2,4\}$.故选A.

3. B 【解析】$(a+bi)\cdot i^3=(a+bi)\cdot(-i)=b-ai=4-5i$,所以 $a=5,b=4$.故选B.

4. C 【解析】$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60°=3$.故选C.

5. C 【解析】设从该校学生中抽取了 m 人,以分层随机抽样的方式按照 $m:3\,500$ 的比例抽取,

则高二抽取的学生人数为 $1\,100\times\frac{m}{3\,500}=\frac{11m}{35}$,高三抽取的学生人数为 $1\,000\times\frac{m}{3\,500}=\frac{2m}{7}$,

由题意可知,$\frac{11m}{35}-\frac{2m}{7}=5$,解得 $m=175$,

所以高一抽取的学生人数为$\frac{175}{3\,500}\times1\,400=70$.

故选C.

6. C 【解析】该同学种植的3棵树都成活的概率为 $P=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{25}$.故选C.

7. D 【解析】设 $f(x)=\left(\frac{1}{2\,023}\right)^x-\log_{2\,023}x$,易知 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,

又 $f(1)=\frac{1}{2\,023}>0$,$f(2\,023)=\left(\frac{1}{2\,023}\right)^{2\,023}-1<0$,

所以 $1<a<2\,023$;

设 $g(x)=x^3+\log_3 x$,易知 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,

又知 $g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}+\log_3\frac{1}{3}=-\frac{26}{27}<0$,$f(1)=1>0$,所以$\frac{1}{3}=c<b<1$.

综上可知,$c<b<a$.故选D.

8. A 【解析】设通孔的半径为 r,

则六角螺母的表面积为 $2\times2\times6+\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\times6\times2+2\pi r\times2-2\pi r^2=24+12\sqrt{3}+4\pi r-2\pi r^2$,

令 $f(r)=4\pi r-2\pi r^2=-2\pi(r-1)^2+2\pi$,当 $r=1$ 时,$f(r)$取得最大值 2π,所以六角螺母表面积的最大值为 $24+12\sqrt{3}+2\pi\ (\text{cm}^2)$.故选A.

9. AC 【解析】甲同学成绩的极差为 $2.65-2.30=0.35$,乙同学成绩的极差为 $2.60-2.40=0.20$,所以甲同学成绩的极差大于乙同学成绩的极差,A正确;

甲同学成绩按从小到大排序为:2.30,2.35,2.40,2.50,2.50,2.50,2.60,2.65.

由于 $8\times75\%=6$,所以甲同学成绩的75%分位数为 $\frac{1}{2}\times(2.50+2.60)=2.55$,

乙同学成绩按从小到大排序为:2.40,2.40,2.50,2.50,2.50,2.55,2.55,2.60.

由于 $8\times75\%=6$,所以乙同学成绩的75%分位数为 $\frac{1}{2}\times(2.55+2.55)=2.55$.

则甲同学成绩的75%分位数等于乙同学成绩的75%分位数,B错误;

甲同学成绩的均值为 $\bar{x}_甲=\frac{1}{8}\times(2.30+2.35+2.40+2.50+2.50+2.50+2.60+2.65)=\frac{1}{8}\times19.8=2.475$,

乙同学成绩的均值为 $\bar{x}_乙=\frac{1}{8}\times(2.40+2.40+2.50+2.50+2.50+2.55+2.55+2.60)=\frac{1}{8}\times20=2.5$,

所以 $\bar{x}_甲<\bar{x}_乙$,C正确;

由折线图可知,甲的成绩波动大,而乙的成绩波动

小，所以甲同学成绩的方差大于乙同学成绩的方差，D 错误. 故选 AC.

10. AD 【解析】因为 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，又 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，所以 $f(g(x))$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，选项 A，D 正确. 故选 AD.

11. AC 【解析】由图象可知，$f\left(\frac{\pi}{9}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$，所以 $x=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{9}$ 为函数图象的一条对称轴.

因为 $\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{9}-\left(-\frac{\pi}{9}\right)=\frac{\pi}{3}$，所以 $T=\frac{2\pi}{3}$，A 正确；

又 $\omega=\frac{2\pi}{T}$，所以 $\omega=3$，B 错误；

将 $\left(-\frac{\pi}{9},6\right)$ 代入 $f(x)=4\cos(3x+\varphi)+2$ 得，$3\times\left(-\frac{\pi}{9}\right)+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，C 正确；

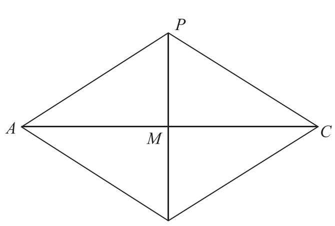
由图知曲线 $f(x)$ 不关于点 $\left(\frac{\pi}{9},0\right)$ 对称，D 错误.

故选 AC.

12. ABD 【解析】取 AC 的中点 E，则 $BE\perp AC$，$PE\perp AC$，又 $PE\cap BE=E$，所以 $AC\perp$ 平面 PBE，又 $PB\subset$ 平面 PBE，所以 $AC\perp PB$，A 正确；

P 的轨迹是以 AC 为轴的两个同底的圆锥底面半圆弧，显然圆锥轴截面的顶角为 $\angle BAD=\angle BCD=120°$，大于 $90°$，所以存在两条母线互相垂直，翻折前 $AB\parallel CD$，所以存在点 P，使得 $AB\perp PC$，B 正确；

当 $PB=2$ 时，三棱锥 $P-ABC$ 为正三棱锥，将三棱锥保留 PB 边展开成如图所示的平面图形，



易知 $ABCP$ 为菱形，当 A,M,C 三点共线时，$|AM|+|CM|$ 取得最小值 $2\sqrt{3}$，C 错误；

当三棱锥 $P-ABC$ 的体积最大时，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，取 AC 的中点 E，则 $PE\perp$ 平面 ABC，易知 $BE=PE=\sqrt{3}$，则 $PB=\sqrt{PE^2+BE^2}=\sqrt{6}$，所以 $\triangle PBC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{2^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$.

设点 A 到平面 PBC 的距离为 d，由 $V_{P\text{-}ABC}=V_{A\text{-}PBC}$ 得，

$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{15}}{2}\times d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}$，解得 $d=\frac{2\sqrt{15}}{5}$.

设直线 AB 与平面 PBC 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{d}{AB}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，D 正确. 故选 ABD.

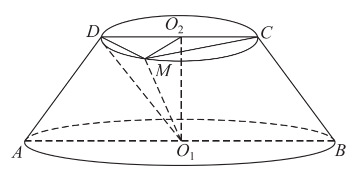
13. 5 【解析】$a+2i=5+2i$，根据复数相等可知，$a=5$.

14. $-\frac{7}{2}$ 【解析】$\boldsymbol{a}-m\boldsymbol{c}=(-1,2)-m(0,-1)=(-1,2+m)$，因为 $(\boldsymbol{a}-m\boldsymbol{c})\perp\boldsymbol{b}$，所以 $-1\times3+(-2)\times(2+m)=0$，解得 $m=-\frac{7}{2}$.

15. 0.2 【解析】设抽到红色小球、黑色小球、蓝色小球分别为事件 A,B,C，则 $\begin{cases}P(A)+P(B)=0.7,\\P(B)+P(C)=0.5,\\P(A)+P(B)+P(C)=1,\end{cases}$

解得 $P(B)=0.2$，则抽到黑色小球的概率为 0.2.

16. 2 【解析】连接 O_2M，如图，



因为在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB=2CD$，所以 $O_1B=CD$，则四边形 $BCDO_1$ 为平行四边形，所以 $O_1D=BC$.

连接 DM,CM，因为 $\overset{\frown}{CM}=2\overset{\frown}{MD}$，所以 $\angle DCM=30^\circ$，在 $\mathrm{Rt}\triangle CDM$ 中，$DM=\frac{1}{2}CD=\sqrt{3}$.

由 $O_2D=O_2M$，$O_1O_2\perp O_2D$，$O_1O_2\perp O_2M$ 可得，$O_1M=O_1D$.

在 $\triangle DO_1M$ 中，$\cos\angle MO_1D=\frac{O_1M^2+O_1D^2-3}{2O_1M\cdot O_1D}=\frac{5}{8}$，解得 $O_1M=O_1D=2$，故 $BC=2$.

17. **解**：(1)当 $m=-1$ 时，$z=\frac{1+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(1+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$，（2 分）

所以 $|z|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.（5 分）

(2) $z=\frac{1-2m\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(1-2m\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{1-2m}{2}-\frac{1+2m}{2}\mathrm{i}$，（6 分）

所以 $\bar{z}=\frac{1-2m}{2}+\frac{1+2m}{2}\mathrm{i}$.（7 分）

则 $\bar{z}-3z=2m-1+(2+4m)\mathrm{i}$，（8 分）

当 $\bar{z}-3z$ 是纯虚数时，则 $\begin{cases}2m-1=0,\\2+4m\neq 0,\end{cases}$

解得 $m=\frac{1}{2}$，（9 分）

所以当 $\bar{z}-3z$ 不是纯虚数时，$m\neq\frac{1}{2}$，

故 m 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.（10 分）

18. **解**：(1)由 $\boldsymbol{a}=(-2,1)$，$\boldsymbol{b}=(3,2)$，$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$ 可得，$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-4,2)-(3,2)=(-7,0)$，（2 分）

所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|}=\frac{14}{\sqrt{5}\times 7}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.（5 分）

(2) $\boldsymbol{a}-m\boldsymbol{c}=(-2,1)-m(-7,0)=(7m-2,1)$，（7 分）

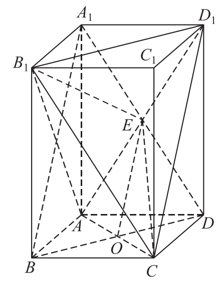
$2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(6,4)-(-2,1)=(8,3)$，（9 分）

因为 $(\boldsymbol{a}-m\boldsymbol{c})/\!/(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，

所以 $3(7m-2)-1\times 8=0$，（10 分）

解得 $m=\frac{2}{3}$.（12 分）

19. **解**：(1)证明：连接 BD，与 AC 交于点 O，如图，



因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，所以 O 为 BD 的中点.（1 分）

又四边形 ADD_1A_1 为矩形，$AD_1\cap A_1D=E$，所以 E 为 A_1D 的中点.（2 分）

连接 OE，则 OE 为 $\triangle A_1BD$ 的中位线，所以 $OE/\!/A_1B$.（4 分）

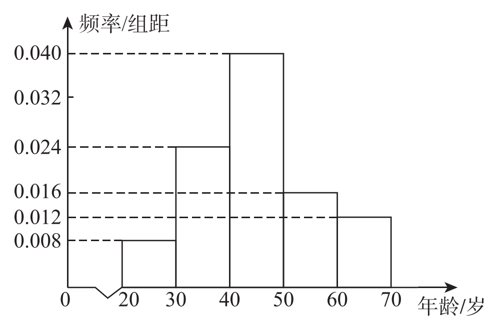
又 $OE\subset$ 平面 ACE，$A_1B\not\subset$ 平面 ACE，所以 $A_1B/\!/$ 平面 ACE.（6 分）

(2)连接 B_1D_1，CD_1，因为 E 为 AD_1 的中点，则 $V_{\text{三棱锥}E\text{-}AB_1C}=\frac{1}{2}V_{\text{三棱锥}D_1\text{-}AB_1C}=\frac{1}{2}(V_{\text{四棱柱}ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1}-4V_{\text{三棱锥}B_1\text{-}ABC})=\frac{1}{2}\left(4AA_1-4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times AA_1\right)=2$，（11 分）

解得 $AA_1=3$.（12 分）

20. **解**：(1)年龄在 $[30,40)$ 的频率为 $1-(0.008+0.040+0.016+0.012)\times 10=0.24$.（1 分）

补充完整的频率分布直方图如下图：



（3 分）

(2)所有用户的平均年龄的估计值为 $10\times(0.008\times 25+0.024\times 35+0.040\times 45+0.016\times 55+0.012\times 65)=45$，

故估计样本中所有用户的平均年龄为45岁.(6分)

(3)由分层随机抽样的方法可知,抽取的4人中,年龄在[20,30)内的有1人,记为A;年龄在[30,40)内的有3人,分别记为B_1,B_2,B_3. (8分)

则从这4人中随机抽取2人的所有基本事件有$(A,B_1),(A,B_2,),(A,B_3),(B_1,B_2),(B_1,B_3),(B_2,B_3)$,共6种; (10分)

记这2人取自不同年龄区间为事件M,其基本事件有$(A,B_1),(A,B_2),(A,B_3)$,共3种, (11分)

故这2人取自不同年龄区间的概率为$P(M)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. (12分)

21.**解**:(1)因为$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,

所以$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DB}\perp\overrightarrow{BC}$,

即$AD\perp DB,DB\perp BC$,

则$AD/\!/BC$. (1分)

因为$\angle BAD=30^\circ,\angle BCD=45^\circ$,

所以$AD=\sqrt{3}BD=\sqrt{3}BC$. (2分)

所以$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\sqrt{3}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}=-\sqrt{3}\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$;

(4分)

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=(1-\sqrt{3})\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$. (5分)

(2)由(1)可知,$AD/\!/BC$,所以$\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{BC}=\sqrt{3}$,

(6分)

则$\frac{AE}{AC}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$,

所以$\overrightarrow{AE}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{3-\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})$. (7分)

又$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{3}$,所以$BC=1$,则$CD=\sqrt{2}$,

即$|\boldsymbol{m}|=1,|\boldsymbol{n}|=\sqrt{2}$, (8分)

所以$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|\cos 45^\circ=1\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$.

(9分)

易知$\overrightarrow{BA}=(\sqrt{3}-1)\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$,

所以$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BA}=-\frac{3-\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})\cdot[(\sqrt{3}-1)\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}]=-\frac{3-\sqrt{3}}{2}[(3-\sqrt{3})\boldsymbol{m}^2+(2\sqrt{3}-1)\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}^2]=-\frac{3-\sqrt{3}}{2}\times(4+\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}-9}{2}$. (12分)

22.**解**:(1)由$\angle BAD=120^\circ,AD=AB$可知,$\angle ABD=\angle ADB=30^\circ$,

又$BD=3\sqrt{3},BO=2OD$,所以$OB=\frac{2}{3}BD=2\sqrt{3}$.

(1分)

在$\triangle ABD$中,由正弦定理得,$\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$,

所以$AB=\frac{3\sqrt{3}\sin 30^\circ}{\sin 120^\circ}=3$. (3分)

在$\triangle ABO$中,由余弦定理得,

$OA^2=AB^2+OB^2-2AB\cdot OB\cos\angle ABD=9+12-2\times3\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$,

故$OA=\sqrt{3}$. (5分)

(2)由$OA=\sqrt{3},OC=3OA$得,$OC=3\sqrt{3}$. (6分)

在$\triangle AOD$中,由(1)知,$OA=OD=\sqrt{3}$,又$\angle ADB=30^\circ$,则$\angle DAO=30^\circ$,

所以$\angle AOD=120^\circ$,则$\angle BOC=120^\circ,\angle COD=60^\circ$. (8分)

故四边形$ABCD$的面积为$S_{ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle COD}=\frac{1}{2}AB\times AD\sin\angle BAD+\frac{1}{2}OB\times OC\sin\angle BOC+\frac{1}{2}OD\times OC\sin\angle COD=\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$. (12分)