山东省实验中学2023届高三第一次模拟考试

数学参考答案　2023.5

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	D	C	C	B	B	C

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

题号	9	10	11	12
答案	AB	ABC	ACD	ACD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13．16　　14．1（答案不唯一，2,3均可）　　15．2　　16．$\left[\pi,\dfrac{5\pi}{3}\right]$

四、解答题：共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】

（1）因为$S_{n+1}^2-S_n^2=8n$，当$n\geq 2$时，$S_n^2=\left(S_n^2-S_{n-1}^2\right)+\cdots+\left(S_2^2-S_1^2\right)+S_1^2$

$=8(n-1)+\cdots+8\times1+1=8\left[1+2+3+\cdots+(n-1)\right]+1$

$=8\times\dfrac{n(n-1)}{2}+1=(2n-1)^2$，

因为$a_n>0$，所以$S_n>0$，故$S_n=2n-1$.　……………………………　3分

当$n=1$时，$S_1=a_1=1$适合上式，

所以$S_n=2n-1$，$n\in \mathrm{N}^*$.　……………………………　5分

（2）因为$S_n=2n-1$，$n\in \mathrm{N}^*$，

所以当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n-1)-(2n-3)=2$.

所以$a_n=\begin{cases}1，& n=1,\\ 2，& n\geq 2.\end{cases}$　……………………………　7分

所以数列$\{b_n\}$：1，1，2，1，2，2，1，2，2，2，……，

设$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}\leqslant 20$，则$n\leqslant 5$，

所以$\{b_n\}$的前20项是由6个1与14个2组成.

所以$T_{20}=6\times1+14\times2=34$.　……………………………　10分

18.【解析】

（1）证明：取 AC 的中点 M，连接 MB，MP，

$\because$ 在 $\triangle PAC$ 中，$PA=PC$，$MA=MC$，$\therefore MP\perp AC$，

同理可在 $\triangle ABC$ 中，$AB=BC$，$MA=MC$，

$\because MB\perp AC$，且 $MP\cap MB=M$，$\therefore AC\perp$ 平面 PMB，

又 $PB\subset$ 平面 PMB，$\therefore PB\perp AC$ …………………………… 4 分

（2）因为平面 $PCD\perp$ 平面 ABCD，交线为 CD，又 $\angle ABC=90°$，$AB//CD$，

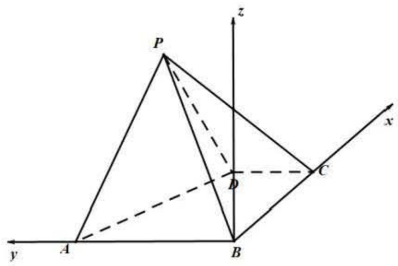
所以 $BC\perp CD$，$BC\subset$ 平面 ABCD，

所以 $BC\perp$ 面 PCD，$PC\subset$ 面 PCD，所以 $BC\perp PC$，

故 $\angle PCD$ 为二面角 $P-BC-D$ 的平面角，$\angle PCD=45°$，…………………………… 6 分

以 B 为原点，以 BC 为 x 轴，以 BA 为 y 轴，建立如图所示的坐标系，

则 $P(2,2,2)$，$A(0,2,0)$，$C(2,0,0)$，$D(2,1,0)$



设平面 PAD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y+2z=0\\ 2x-y=0\end{cases}$，

令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,2,-1)$ ……………… 9 分

又 $\overrightarrow{BP}=(2,2,2)$，所以直线 BP 与平面 PAD 所成角 θ 的正弦值为

$\sin\theta=|\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{BP}>|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{BP}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. …………………………… 12 分

19.【解析】

（1）由直方图可知成绩在 $[30,40]$，$(40,50]$，$(50,60]$，$(60,70]$ 的学生频率和为 $0.06+0.12+0.18+0.34=0.7$，

所以抽取的 100 名学生成绩的第 80 百分位数在 $(70,80]$ 内，

设第 80 百分位数为 x，则 $(x-70)\times0.016=0.1\Rightarrow x=76.25$，

即第 80 百分位数为 76.25. …………………………… 2 分

（2）由频率分布直方图可得：

竞赛成绩在 $(40,50]$，$(50,60]$ 两组的频率之比为 $0.12:0.18=2:3$，

所以 10 人中竞赛成绩在 $(40,50]$ 的人数为 $10\times\dfrac{4}{10}=4$ 人；在 $(50,60]$ 的人数为 $10\times\dfrac{6}{10}=6$ 人；

则 X 所有可能的取值为 $0,1,2,3$， …………………………… 3 分

$\therefore P(X=0)=\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}$； $P(X=1)=\dfrac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\dfrac{60}{120}=\dfrac{1}{2}$；

$P(X=2)=\dfrac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$； $P(X=3)=\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{4}{120}=\dfrac{1}{30}$；

$\therefore X$ 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{30}$

$E(X)=0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{3}{10}+3\times\dfrac{1}{30}=\dfrac{6}{5}$. …………………………… 8 分

（3）用频率估计概率，竞赛成绩在 $[30,40]$ 内的概率 $p=\dfrac{0.06}{0.06+0.12}=\dfrac{1}{3}$；则

$P(k)=C_{20}^k p^k(1-p)^{20-k}=C_{20}^k\times(\dfrac{1}{3})^k\times(\dfrac{2}{3})^{20-k}=\dfrac{C_{20}^k 2^{20-k}}{3^{20}}$， …………………………… 9 分

$$\frac{P(k+1)}{P(k)}=\frac{\dfrac{C_{20}^{k+1}2^{19-k}}{3^{20}}}{\dfrac{C_{20}^k 2^{20-k}}{3^{20}}}=\frac{1}{2}\times\frac{\dfrac{20!}{(k+1)!(19-k)!}}{\dfrac{20!}{k!(20-k)!}}=\frac{1}{2}\times\frac{20-k}{k+1}=\frac{1}{2}(-1+\frac{21}{k+1}).$$

令 $\dfrac{P(k+1)}{P(k)}=\dfrac{1}{2}(-1+\dfrac{21}{k+1})\geqslant 1$，解得 $k\leqslant 6$， …………………………… 11 分

所以当 $k=6$ 或 $k=7$， $P(k)$ 最大 …………………………… 12 分

20.【解析】

（1）在 $\triangle ACD$ 中， $AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cdot\cos120^\circ=49$，所以 $AC=7$，

由正弦定理， $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{\sin A-\sin C}{\sin A-\sin B}=\dfrac{a-c}{a-b}$， 可得 $b^2=a^2+c^2-ac$，

再由余弦定理， $\cos B=\dfrac{1}{2}$， 又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$. …………………………… 3 分

因为 $\angle ADC=120^\circ$，所以 $\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$，所以 A，B，C，D 四点共圆，

则四边形 ABCD 的外接圆半径就等于 $\triangle ABC$ 外接圆的半径.

又 $2R=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$， 所以 $R=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$. …………………………… 5 分

（2）由（1）可知：$a^2+c^2-ac=49$，则 $(a+c)^2=49+3ac$．$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r$，

则 $r=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{ac}{7+a+c}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\times\frac{(a+c)^2-49}{7+a+c}=\frac{1}{2\sqrt{3}}(a+c-7)$． ………………………… 7 分

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理，$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=\frac{14\sqrt{3}}{3}$，

所以 $a=\frac{14\sqrt{3}}{3}\sin A$，$c=\frac{14\sqrt{3}}{3}\sin C$，则

$$a+c=\frac{14\sqrt{3}}{3}(\sin A+\sin C)=\frac{14\sqrt{3}}{3}\left[\sin A+\sin(120^\circ-A)\right]=\frac{14\sqrt{3}}{3}\left(\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A\right)$$

$$=\frac{14\sqrt{3}}{3}\left(\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)=14\left(\sin A\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos A\cdot\frac{1}{2}\right)=14\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right),$$

………………………… 10 分

又 $A\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$，所以 $A+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

所以 $\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，$14\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\in(7,14]$，

故 $r\in\left(0,\frac{7\sqrt{3}}{6}\right]$ ………………………… 12 分

21.【解析】

（1）设 $P(x,y)$，由题意可得 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x|+1$,

两边平方并整理，得 $y^2=2|x|+2x$，

故曲线 C 的方程为 $y^2=2|x|+2x$． ………………………… 3 分

（2）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$，由题意可得直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，

与椭圆 E 的方程联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ y=k(x-1)\end{cases}$，得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，

则 $\Delta>0, x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}$，$x_1\cdot x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$，

可得$\left|AB\right|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\dfrac{12\left(k^2+1\right)}{3+4k^2}$， …………………………… 6 分

$\because y^2=2\left|x\right|+2x=\begin{cases}4x,x\ge 0\\0,x<0\end{cases}$，

若直线 l 交曲线 C 于 M、N 两点，且 $k\ne 0$，则直线 l 与 $y^2=4x\left(x\ge 0\right)$ 相交，

直线 l 的方程与曲线 C 的方程联立 $\begin{cases}y^2=4x\\y=k\left(x-1\right)\end{cases}$，得 $k^2x^2-\left(2k^2+4\right)x+k^2=0$，

则 $\Delta>0,x_3+x_4=\dfrac{2k^2+4}{k^2}$， $x_3\cdot x_4=1$，

可得：$\left|MN\right|=x_3+x_4+2=\dfrac{4\left(k^2+1\right)}{k^2}$， …………………………… 9 分

$\therefore \dfrac{\lambda}{\left|AB\right|}-\dfrac{1}{\left|MN\right|}=\dfrac{\lambda\left(4k^2+3\right)}{12\left(k^2+1\right)}-\dfrac{3k^2}{12\left(k^2+1\right)}=\dfrac{\left(4\lambda-3\right)k^2+3\lambda}{12\left(k^2+1\right)}$，

要使 $\dfrac{\lambda}{\left|AB\right|}-\dfrac{1}{\left|MN\right|}$ 为定值，则 $4\lambda-3=3\lambda$，即 $\lambda=3$. …………………………… 12 分

22.【解析】

（1）$\because f'(x)=a\cos x-\dfrac{1}{1+x}$（$-1<x\le 0$）， a 为正实数，

$\therefore$函数 $f'(x)$ 在区间 $(-1,0]$ 上单调递增，且 $f'(0)=a-1$. …………………………… 1 分

①当 $0<a\le 1$ 时， $f'(x)\le f'(0)\le 0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(-1,0]$ 上单调递减，

此时 $f(x)\ge f(0)=0$，符合题意. …………………………… 2 分

②当 $a>1$ 时， $f'(0)=a-1>0,f'\left(\dfrac{1}{a}-1\right)=a\cos\left(\dfrac{1}{a}-1\right)-a<a-a=0$，

由零点存在定理，$\exists x_0\in(-1,0)$ 时，有 $f'\left(x_0\right)=0$，即函数 $f(x)$ 在 $\left(-1,x_0\right)$ 上递减，

在 $\left(x_0,0\right)$ 递增，所以当 $x\in\left(x_0,0\right)$ 时，有 $f\left(x\right)<f(0)=0$，此时不符合.

综上所述，正实数 a 的最大值为 1. …………………………… 4 分

（2）由（1）知，当 $a=1,x\in(-1,0)$ 时， $\sin x>\ln(1+x)$，

令 $x=-\dfrac{1}{k^2}$ 时，有 $\sin\left(-\dfrac{1}{k^2}\right)>\ln\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)=\ln\dfrac{k^2-1}{k^2}$，即 $\sin\dfrac{1}{k^2}<\ln\dfrac{k^2}{k^2-1}$，

累加，得 $\sum\limits_{k=2}^{n}\sin\dfrac{1}{k^2}<\ln\left(\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{2}\cdots\dfrac{n}{n+1}\right)=\ln\dfrac{2n}{n+1}=\ln 2+\ln\dfrac{n}{n+1}<\ln 2$． …………… 7 分

（3）因为 $g(x)=e^{x+1}-\ln(x+1)$，所以 $g'(x)=e^{x+1}-\dfrac{1}{x+1}$，即函数 $g'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上递增，

又 $g'(0)=e-1>0, g'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$，

由零点存在定理，$\exists x_1\in\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 时，有 $g'(x_1)=0$，即 $e^{x_1+1}=\dfrac{1}{x_1+1}$，

因此 $x_1+1=\ln\dfrac{1}{x_1+1}=-\ln(x_1+1)$，而函数 $g(x)$ 在 $(-1,x_1)$ 上递减，在 $(x_1,+\infty)$ 上递增，

所以 $m=g(x)_{\min}=g(x_1)=e^{x_1+1}-\ln(x_1+1)=\dfrac{1}{x_1+1}+\ln\dfrac{1}{x_1+1}=\dfrac{1}{x_1+1}+x_1+1$，

所以 $m\in\left(2,\dfrac{5}{2}\right)$． ………………………… 9 分

设 $H(x)=e^{1+x}-e^m\ln(1+x)\left(2<m<\dfrac{5}{2}\right)$，则 $H'(x)=e^{1+x}-\dfrac{e^m}{1+x}$，

所以函数 $H'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上递增，又 $H'(0)=e-e^m<0$，$H'(m-1)=\dfrac{e^m(m-1)}{m}>0$，

由零点存在定理，$\exists x_2\in(0,m-1)$ 时，$H'(x_2)=0$，即 $e^{1+x_2}=\dfrac{e^m}{1+x_2}$，

因此 $m=1+x_2+\ln(1+x_2)$，又 $m=\dfrac{1}{x_1+1}+\ln\dfrac{1}{x_1+1}$，

设 $m(x)=x+\ln x$，则函数 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增， ………………………… 11 分

于是 $1+x_2=\dfrac{1}{1+x_1}$ 且 $\ln(1+x_2)=1+x_1$，

而函数 $H(x)$ 在 $(-1,x_2)$ 上递减，在 $(x_2,+\infty)$ 上递增，

$\therefore H(x)_{\min}=H(x_2)=e^{1+x_2}-e^m\ln(1+x_2)=e^m\left(\dfrac{1}{1+x_2}-\ln(1+x_2)\right)=e^m\left(1+x_1-(1+x_1)\right)=0$，

即函数 $H(x)$ 有唯一零点 x_2，

故方程 $e^{1+x-m}-\ln(1+x)=0$ 有唯一的实数解． ………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。