试题解析

1．D

解一元二次方程求集合 A, 由具体函数的定义域求集合 B, 再利用集合的并运算求 $A\cup B$ 即可.

依题意，得 $A=\{x|-1<x<2\}$， $B=\{x|x\le 2\}$，

$\therefore A\cup B=(-\infty,2]$.

故选：D．

2．D

由正弦定理、三角形边角关系及充分条件、必要条件的定义即可得解.

由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，且 $A,B\in(0,\pi)$，

若 $\sin A\ge\sin B$，则 $a\ge b$，所以 $A\ge B$，所以 $\cos A\le\cos B$，故充分性成立；

若 $\cos A\le\cos B$，则由余弦函数的单调性可得 $A\ge B$，所以 $a\ge b$，$\sin A\ge\sin B$，

故必要性成立.

所以“$\sin A\ge\sin B$”是“$\cos A\le\cos B$”的充要条件.

故选：D.

3．B

按照相邻捆绑，不相邻插空的方法求解．

A，B 相邻，捆绑作为一个节目与 E、F 进行全排列，然后把 C、D 插入其中的四个空档中，排法总数为 $A_2^2A_3^3A_4^2=144$．

故选：B．

4．C

根据圆柱和球的体积公式和表面积公式即可求解.

设圆柱部分的高是 h，

所以 $\pi R^2h+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{11}{3}\pi R^3$，

所以 $h+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}R=\dfrac{11}{3}R$

所以 $h=3R$，

内壁表面积为 $2\pi Rh+\dfrac{1}{2}\cdot 4\pi R^2=2\pi R\cdot 3R+\dfrac{1}{2}\cdot 4\pi R^2=8\pi R^2$，

故选：C.

5．A

利用指数与对数的互换表示出 $\lg 3$，然后利用换底公式以及对数的运算法则求解即可．

由题可得 $b=\log_3 10=\frac{1}{\lg 3}$，即 $\lg 3=\frac{1}{b}$．

原式 $=\log_5 6=\frac{\lg 6}{\lg 5}=\frac{\lg 2+\lg 3}{1-\lg 2}=\frac{a+\frac{1}{b}}{1-a}=\frac{ab+1}{b-ab}$．

故选：A．

6．A

根据给定的离心率及三角形周长，求出椭圆方程，再设出直线 MN 的方程，与椭圆方程联立求解三角形面积即可．

依题意，△MNF_2周长 $|MF_2|+|MN|+|NF_2|=|MF_2|+|MF_1|+|NF_1|+|NF_2|=4a=16$，解得 $a=4$，

而椭圆的离心率 $e=\frac{1}{2}$，则其半焦距 $c=\frac{1}{2}a=2$，因此 $b^2=a^2-c^2=12$，

椭圆 C：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$，$F_1(-2,0)$，显然直线 MN 不垂直于 y 轴，设其方程为 $x=ty-2$，

由 $\begin{cases}x=ty-2\\3x^2+4y^2=48\end{cases}$ 消去 x 得：$(3t^2+4)y^2-12ty-36=0$，设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

则有 $y_1+y_2=\frac{12t}{3t^2+4},y_1y_2=-\frac{36}{3t^2+4}$，

$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{\frac{144t^2}{(3t^2+4)^2}+\frac{144}{3t^2+4}}=\frac{24\sqrt{t^2+1}}{3t^2+4}=\frac{24}{3\sqrt{t^2+1}+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}$，

令 $u=\sqrt{t^2+1}\geq 1$，函数 $3u+\frac{1}{u}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，因此当 $t=0$ 时，$3\sqrt{t^2+1}+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ 取得最小值 4，

即 $|y_1-y_2|_{\max}=6$，△MNF_2的面积 $S_{\triangle MNF_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_1-y_2|\leq\frac{1}{2}\times 4\times 6=12$，当且仅当 $MN\perp x$ 时取等号，

所以△MNF_2面积的最大值为 12．

故选：A

7．A

根据三角函数恒等变换公式化简已知等式，再根据诱导公式简化 $\sin\left(\theta+\frac{7\pi}{6}\right)$ 即可得到答案．

$$\sin\theta+\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=1$$

$$\Rightarrow\sin\theta+\cos\theta\cos\frac{\pi}{6}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{6}=1$$

$$\Rightarrow\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)=1$$

$$\Rightarrow\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\left(\theta+\frac{7\pi}{6}\right)=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}+\pi\right)=-\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

故选:A

8．B

由函数的解析式结合对数的运算性质即可得解.

∵函数 $f(x)=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$），$f(x_1x_2\cdots x_{2018})=4$，

∴ $f(x_1x_2\cdots x_{2018})=\log_a(x_1x_2\cdots x_{2018})=4$，

∴ $f(x_1^2)+f(x_2^2)+\cdots+f(x_{2018}^2)$

$=log_a\left(x_1^2\times x_2^2\times\cdots\times x_{2018}^2\right)$

$=\log_a(x_1x_2\cdots x_{2018})^2$

$=2\log_a(x_1x_2\cdots x_{2018})$

$=2\times4=8$．

故选 B．

本题考查函数值的求法，考查对数性质、运算法则等基础知识，考查运算求解能力，是基础题．

9．BD

复数 $z=1-2i$，可知其实部为 1 与虚部为 -2，其模长为 $\sqrt{5}$，$z\cdot\overline{z}=5$，将复数 z 代入 $x^2-2x+5=0$ 验证即可说明复数 z 为方程的一个根.

因为复数 $z=1-2i$

所以复数 z 的实部是 1，虚部是 -2，A 错误，

$|z|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$，B 正确，

$z\cdot\overline{z}=(1-2\mathrm{i})\cdot(1+2\mathrm{i})=1+4=5$，C 错误，

因为 $(1-2\mathrm{i})^2-2(1-2\mathrm{i})+5=1-4\mathrm{i}-4-2+4\mathrm{i}+5=0$，即复数 z 是方程 $x^2-2x+5=0$ 的一个根，D 正确.

故选：BD.

10．BCD

A. 由 $V_{P-BCQ}=\frac{1}{3}\times AA_1\times\frac{1}{2}\times BC\times h$ 判断；B. 由 $\cos\angle D_1A_1P=\frac{A_1P}{A_1D_1}$，$\overline{AD}\cdot\overline{A_1P}=4\cos^2\angle D_1A_1P$ 求解判断；C.由 $CC_1\perp$ 平面 $ABCD$，得到 $\angle C_1QC$ 是 C_1Q 与平面 $ABCD$ 所成的角求解判断；D.以 D 为原点，分别以 DB,DC,DD_1 为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系，设球心为 $O\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},t\right)$，$P(x,y,1)$，由 $|OP|=|OB|$ 化简得到 t 的范围，再由外接球的表面积为 $S=4\pi\left|\overline{OB}\right|^2$ 判断.

直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 到底面 $ABCD$ 的距离为 $AA_1=1$，设点 Q 到 BC 的距离为 h，则 $V_{P-BCQ}=\frac{1}{3}\times AA_1\times\frac{1}{2}\times BC\times h$，因为 h 不是定值，故四面体 $PBCQ$ 的体积不是定值，故 A 错误；

在 $Rt\triangle A_1PD_1$ 中，$\cos\angle D_1A_1P=\frac{A_1P}{A_1D_1}$，

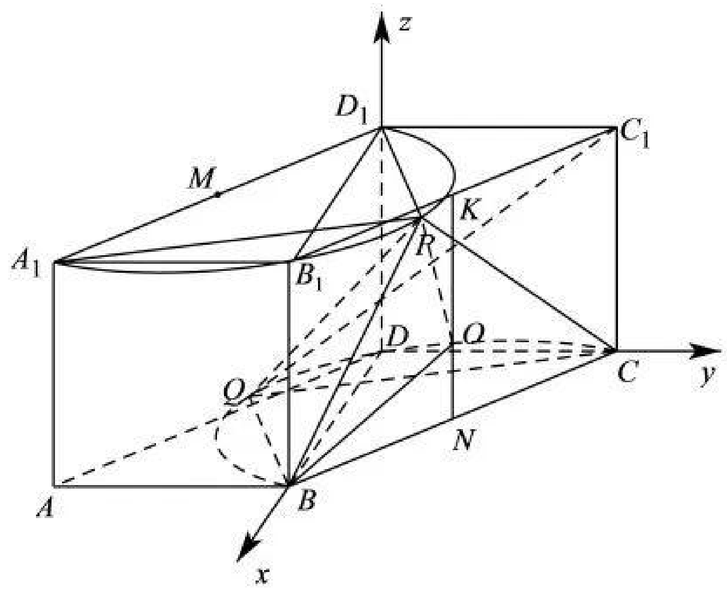
$\overline{AD}\cdot\overline{A_1P}=\overline{A_1D_1}\cdot\overline{A_1P}=\left|\overline{A_1D_1}\right|\cdot\left|\overline{A_1P}\right|\cdot\cos\angle D_1A_1P=4\cos^2\angle D_1A_1P$，

因为 $\angle D_1A_1P\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos\angle D_1A_1P\in(0,1)$，则 $\overline{AD}\cdot\overline{A_1P}\in(0,4)$，故 B 正确；

因为 $CC_1\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\angle C_1QC$ 是 C_1Q 与平面 $ABCD$ 所成的角，则 $\tan\angle C_1QC=\frac{CC_1}{CQ}=\frac{1}{CQ}$，

因为 $CQ\in(0,2)$，所以 $\tan\angle C_1QC>\frac{1}{2}$，故 C 正确；

以 D 为原点，分别以 DB,DC,DD_1 为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系：



则 $B\left(\sqrt{3},0,0\right),C\left(0,1,0\right),A_1\left(\sqrt{3},-1,1\right),D_1\left(0,0,1\right)$，线段 BC 的中点为 $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，线段 A_1D_1 的中点为 $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},1\right)$，

设球心为 $O\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},t\right)$，$P(x,y,1)$，则 $\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1$，

由 $|OP|=|OB|$ 得 $\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+(1-t)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+t^2=1+t^2$，

化简得 $2t=\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1-\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1-2y$，

即 $t=\frac{1}{2}-y$，易知 $-1<y\le\frac{1}{2}$，则 $t=\frac{1}{2}-y\in[0,\frac{3}{2})$，$\left|\overline{OB}\right|=\sqrt{1+t^2}\in[1,\frac{\sqrt{13}}{2})$，

所以 外接球的表面积为 $S=4\pi\left|\overline{OB}\right|^2\in[4\pi,13\pi)$，故 D 正确，

故选：BCD

11．AD

根据新定义进行证明判断 A，假设二次函数是“k 距周期函数”，然后由新定义推理判断 B，用反例判断 C，根据周期函数的定义求解判断 D．

A．设一次函数为 $f(x)=ax+b$，则 $f(x+T)=a(x+T)+b=ax+b+aT=f(x)+aT$，其中 $k=aT$，A 正确；

B．设二次函数为 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$，

$f(x+T)=a(x+T)^2+b(x+T)+c=ax^2+(2aT+b)x+aT^2+bt+c$，

若 $f(x)$ 是“k 距周期函数”，则 $2aT=0$，则 $T=0$，不满足新定义，B 错误；

C．设 $f(x)=\begin{cases}x, x\in Q\\ x+2, x\notin Q\end{cases}$，则 $f(x)$ 是“1 距周期函数”，且类周期为 1，$f(1)=1$，C 错；

D．设 $x\in[2n,2n+2]$，则 $x-2n\in[0,2]$，即 $g(x)=g(x-2n)$，

则 $f(x)=x+g(x)=(x-2n)+g(x-2n)+2n=f(x-2n)+2n\in[2n,2n+1]$，D 正确．

故选：AD．

关键点点睛：本题考查新定义，解题关键是理解新定义，然后根据新定义解决问题．新定义的实质是 $f(x+T)=f(x)+k$ 恒成立（$Tk\neq 0$），因此可转化恒等式进行分析．

12．BCD

利用和事件的概率公式和条件概率公式可得．

对于 A：$P\left(A+\overline{B}\right)=P(A)+P\left(\overline{B}\right)-P\left(A\overline{B}\right)$，$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-P\left(A\overline{B}\right)$，

所以 $P\left(A\overline{B}\right)=\frac{1}{12}$，故 A 错误；

对于 B：$\because P(AB)+P\left(A\overline{B}\right)=P(A)$，$\therefore P(AB)+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$，$\therefore P(AB)=\frac{1}{4}$，

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$，故 B 正确；

对于 C：$P(\overline{B}|A)=\frac{P(A\overline{B})}{P(A)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$，$P\left(\overline{B}\right)=\frac{1}{4}$，$\therefore P(\overline{B}|A)=P(\overline{B})$，故 C 正确．

对于 D：$P\left(A\overline{B}+\overline{A}B\right)=P\left(A\overline{B}\right)+P\left(\overline{A}B\right)=\frac{1}{12}+P\left(\overline{A}B\right)$，

$\because P(B)=P(AB)+P\left(\overline{A}B\right)$，$\therefore \frac{3}{4}=\frac{1}{4}+P\left(\overline{A}B\right)$，$\therefore P\left(\overline{A}B\right)=\frac{1}{2}$，

$\therefore P\left(A\overline{B}+\overline{A}B\right)=\frac{1}{12}+\frac{1}{2}=\frac{7}{12}$，所以 D 正确．

故选：BCD.

13．26

根据题意得到 $\bar{x}=3.5, \bar{y}=42$，得到 $\dfrac{49+m+39+54}{4}=42$，解之得解.

由题得 $\bar{x}=3.5,$

回归方程是 $\hat{y}=9.4x+9.1$ 经过样本中心点是 $(\bar{x},\bar{y})$，且 $\bar{x}=3.5, \therefore \bar{y}=42$，

所以 $\dfrac{49+m+39+54}{4}=42$，解得 $m=26$.

故答案为：26

本题主要考查回归直线方程的应用，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

14．$a_n=4n-1$，$n\in N^*$

根据已知，利用等差数列的性质以及通项公式求解.

因为等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_5=22$，

所以 $2a_3=22$，所以 $a_3=11$，

又因为 $S_n=n(a_n-2n+2)$，

所以 $S_2=a_1+a_2=2(a_2-2)$，即 $a_2=a_1+4$，所以 $d=4$，

所以 $a_n=a_3+(n-3)d=11+(n-3)\cdot 4=4n-1$，$n\in N^*$.

故答案为：$a_n=4n-1$，$n\in N^*$.

15．$\{x\,|\,x=k\pi+(-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{6}\},k\in Z$

方程 3sin$x$=1+cos2x,即 3sin$x$=1+1−2$\sin^2 x$，解关于 $\sin x$ 的方程即可

方程 3sin$x$=1+cos2x,即 3sin$x$=1+1−2$\sin^2 x$,即 2$\sin^2 x$+3sin$x$−2=0,

求得 sin$x$=−2(舍去),或 sin$x$=$\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \{x\,|\,x=k\pi+(-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{6}\},k\in Z$，

故答案为 $\{x\,|\,x=k\pi+(-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{6}\},k\in Z$

16．$\dfrac{\pi}{3}$；

分析：根据余弦定理，将题中等式化简整理，可得 sinBcosC=2sinAcosB－sinCcosB，利用

两角和正弦公式化简得 2sinAcosB=sin（B+C）=sinA，在两边约去 sinA 得 $cosB=\frac{1}{2}$，结合三角形内角取值范围即可得到角 B 的大小.

详解：∵在△ABC 中，$b^2=a^2+c^2-2accosB$，

∴$b^2-a^2-c^2=-2accosB$，同理可得 $c^2-a^2-b^2=-2abcosC$

$\because \frac{sinC}{2sinA-sinC}=\frac{b^2-a^2-c^2}{c^2-a^2-b^2}$

$\therefore \frac{sinC}{2sinA-sinC}=\frac{-2accosB}{-2abcosC}=\frac{ccosB}{bcosC}=\frac{sinCcosB}{sinBcosC}$，

∵sinC≠0，可得 sinBcosC=2sinAcosB - sinCcosB，

∴2sinAcosB=sinBcosC+sinCcosB=sin（B+C）=sinA，

∵sinA≠0，∴等式两边约去 sinA，可得 $cosB=\frac{1}{2}$，

∵0＜B＜π，∴角 B 的大小 $\frac{\pi}{3}$.

点睛：点睛：(1) 在三角形中根据已知条件求未知的边或角时，要灵活选择正弦、余弦定理进行边角之间的转化，以达到求解的目的 .

(2) 求角的大小时，在得到角的某一个三角函数值后，还要根据角的范围才能确定角的大小，这点容易被忽视，解题时要注意 .

17．(1)$a=1$，极大值 1，无极小值；(2)存在，$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{e}\right)$.

(1)结合已知条件，首先求出 $f'(\mathrm{e})$，然后利用两直线垂直关系即可求出 a，然后利用导函数求出 $f(x)$ 的单调区间，进而求得极值；(2)结合(1)中结论，求出零点存在的大致区间，再结合已知条件即可求解.

(1)由 $f(x)=\frac{a+\ln x}{x}$，得 $f'(x)=\frac{1-a-\ln x}{x^2}$，

因为 $f(x)$ 的图象在点 $(\mathrm{e},f(\mathrm{e}))$ 处的切线与直线 $y=\mathrm{e}^2x+\mathrm{e}$ 垂直，

所以 $f'(\mathrm{e})=\frac{1-a-\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}^2}=\frac{-a}{\mathrm{e}^2}=-\frac{1}{\mathrm{e}^2}$，解得 $a=1$.

所以 $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}(x>0)$，令 $f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}=0$，得 $x=1$，

因为当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减 .

故$f(x)$在$x=1$处取得极大值 1，无极小值．

(2)由(1)，知$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，且$f(x)>0$，

又$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，且$f\left(e^{-2}\right)=\dfrac{1+\ln e^{-2}}{e^{-2}}=-e^{2}<0$，$f(1)=1>0$，

所以由零点存在定理，得$f(x)$在区间$(0,1)$内存在唯一零点．

若函数$f(x)$在区间$\left(t,t+\dfrac{2}{3}\right)(t>0)$上存在极值和零点，

则$\begin{cases}0<t<1<t+\dfrac{2}{3}\\ f(t)=\dfrac{1+\ln t}{t}<0\end{cases}$，解得$\dfrac{1}{3}<t<\dfrac{1}{e}$．

所以存在符合条件的区间$\left(t,t+\dfrac{2}{3}\right)(t>0)$，此时实数$t$的取值范围为$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{e}\right)$．

18．(1)$a_n=2^{2n-1}$；

(2)5

（1）利用$a_n=\begin{cases}S_1,n=1\\ S_n-S_{n-1},n\geq 2\end{cases}$可求出数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）由（1）得$b_n=2n-1$，然后由$a_{m+1}-1<b_n\leq a_{m+2}+1$，得$2^{2m}<n\leq 2^{2m+2}+1$，则$c_m=2^{2m+2}-2^{2m}+1$，从而可求出$S_m$，进而可求出使得$S_m>2022$的最小整数$m$的值.

（1）当$n=1$时，$3S_1=4a_1-2$，得$a_1=2$，

当$n\geq 2$时，由$3S_n=4a_n-2$，得$3S_{n-1}=4a_{n-1}-2$，

所以$3S_n-3S_{n-1}=4a_n-2-(4a_{n-1}-2)$，

$3a_n=4a_n-4a_{n-1}$，

所以$a_n=4a_{n-1}$，

所以数列$\{a_n\}$是以 2 为首项，4 为公比的等比数列，

所以$a_n=2\times 4^{n-1}=2^{2n-1}$

(2) 由 (1) 得 $b_n=\log_2 a_n=\log_2 2^{2n-1}=2n-1$,

因为数列 $\{b_n\}$ 中落入区间 $(a_{m+1}-1,a_{m+2}+1]$ 内,

所以 $a_{m+1}-1<b_n\le a_{m+2}+1$,

所以 $2^{2(m+1)-1}-1<2n-1\le 2^{2(m+2)-1}+1$,

$2^{2m+1}<2n\le 2^{2m+3}+2$,

所以 $2^{2m}<n\le 2^{2m+2}+1$,

所以数列 $\{b_n\}$ 中落入区间 $(a_{m+1}-1,a_{m+2}+1]$ 内的项的个数

$c_m=2^{2m+2}-2^{2m}+1=3\times 4^m+1$,

所以 $S_m=\dfrac{12(1-4^m)}{1-4}+m=4^{m+1}+m-4$,

由 $S_m>2022$, 得 $4^{m+1}+m-4>2022$,

即 $4^{m+1}+m>2026$.

当 $m=4$ 时, $4^{4+1}+4=1024+4=1028<2026$,

当 $m=5$ 时, $4^{5+1}+5=4096+5=4101>2026$,

因为 $4^{m+1}+m$ 随 m 的增大而增大,

所以 $S_m>2022$ 的最小整数为 5.

19. (1)证明见解析;

(2)存在; $\dfrac{BF}{BC}=\dfrac{3}{4}$.

(1) 若选①, 取 AC 中点 G, BC 中点 O, AB 中点 H, 可证得四边形 $EDCG$ 为平行四边形, 从而利用勾股定理和平行关系证得 $AC\perp CD$, 由线面垂直和面面垂直判定得到平面 $ABC\perp$ 平面 BCD, 利用面面垂直性质可证得 $DO\perp$ 平面 ABC;

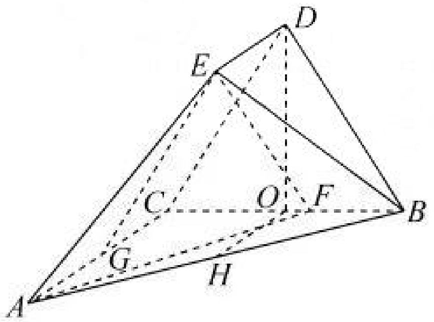
若选②, 取 BC 中点 O, AB 中点 H, 由线面垂直和面面垂直的判定可证得平面 $ABC\perp$ 平面 BCD, 利用面面垂直性质可证得 $DO\perp$ 平面 ABC;

若选③，取 BC 中点 O，AB 中点 H，根据长度和平行关系可证得四边形 $DEHO$ 为平行四边形，由此确定 $EH=\frac{1}{2}AB$，得到 $AE\perp BE$，结合 $AE=BE$ 可得 $BE=2$，从而利用勾股定理和平行关系证得 $AC\perp BD$，由线面垂直和面面垂直判定得到平面 $ABC\perp$ 平面 BCD，利用面面垂直性质可证得 $DO\perp$ 平面 ABC；

三个条件均可说明 DO,OH,BC 两两互相垂直，则以 O 为坐标原点可建立空间直角坐标系，利用面面垂直的向量证明方法可证得结论；

（2）假设存在满足题意的点 $F(0,t,0)(-1\le t\le 1)$，利用二面角的向量求法可构造方程求得 $t=-\frac{1}{2}$，由此可确定 F 点位置，得到 $\frac{BF}{BC}$ 的值．

（1）若选①，取 AC 中点 G，BC 中点 O，AB 中点 H，连接 EG,DO,OH，



$\because ED//AC$，$CG=\frac{1}{2}AC=ED$，$\therefore$ 四边形 $EDCG$ 为平行四边形，$\therefore EG\underline{//}CD$，

$\therefore EG=\sqrt{3}$，又 $AG=\frac{1}{2}AC=1$，$AE=2$，$\therefore AG^2+EG^2=AE^2$，$\therefore AG\perp EG$，

又 $CD//EG$，$\therefore AC\perp CD$，又 $AC\perp BC$，$BC\cap CD=C$，$BC,CD\subset$ 平面 BCD，

$\therefore AC\perp$ 平面 BCD，$\because AC\subset$ 平面 ABC，$\therefore$ 平面 $ABC\perp$ 平面 BCD，

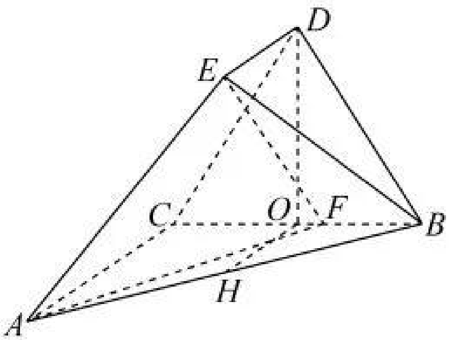
$\because BD=CD$，$\therefore DO\perp BC$，又 $DO\subset$ 平面 BCD，平面 $BCD\cap$ 平面 $ABC=BC$，

$\therefore DO\perp$ 平面 ABC，又 $OH//AC$，$AC\perp BC$，$\therefore OH\perp BC$；

若选②，$\because AC$ ˆ BD，$AC\perp BC$，$BC\cap BD=B$，$BC,BD\subset$ 平面 BCD，

$\therefore AC\perp$ 平面 BCD，$\because AC\subset$ 平面 ABC，$\therefore$ 平面 $ABC\perp$ 平面 BCD，

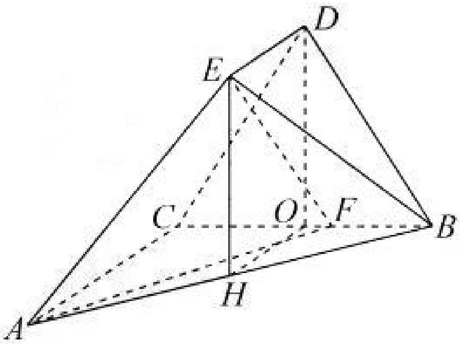
取 BC 中点 O，AB 中点 H，连接 DO,OH，



$\because BD=CD$，$\therefore DO\perp BC$，又 $DO\subset$ 平面 BCD，平面 $BCD\cap$ 平面 $ABC=BC$，

$\therefore DO\perp$ 平面 ABC，又 $OH//AC$，$AC\perp BC$，$\therefore OH\perp BC$；

若选③，取 BC 中点 O，AB 中点 H，连接 OD,OH,EH，



$\because DC=BD=\sqrt{3}$，$\therefore DO\perp BC$，又 $BC=2$，$\therefore DO=\sqrt{2}$；

$\because O,H$ 分别为 BC,AB 中点，$\therefore OH\underset{=}{//}\frac{1}{2}AC$，又 $ED\underset{=}{//}\frac{1}{2}AC$，$\therefore OH\underset{=}{//}ED$，

$\therefore$ 四边形 $DEHO$ 为平行四边形，$\therefore EH=DO=\sqrt{2}$；

Q $AC\perp BC$，$AC=BC=2$，$\therefore AB=2\sqrt{2}$，$\therefore EH=\frac{1}{2}AB$，$\therefore AE\perp BE$，

$\because \angle EAB=\angle EBA$，$\therefore BE=AE=2$，$\therefore BD^2+DE^2=BE^2$，

$\therefore BD\perp DE$，又 $DE//AC$，$\therefore AC\perp BD$，

又 $AC\perp BC$，$BC\cap BD=B$，$BC,BD\subset$ 平面 BCD，

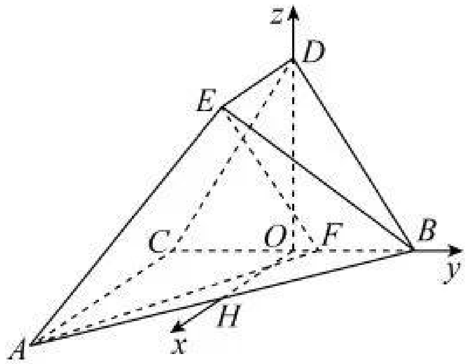
$\therefore AC\perp$ 平面 BCD，$\because AC\subset$ 平面 ABC，$\therefore$ 平面 $ABC\perp$ 平面 BCD，

又 $DO \perp BC$，$DO \subset$ 平面 BCD，平面 $BCD \cap$ 平面 $ABC = BC$，

$\therefore DO \perp$ 平面 ABC，又 $OH // AC$，$AC \perp BC$，$\therefore OH \perp BC$；

综上所述：DO, OH, BC 两两互相垂直，

则以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OB}$ 为 x, y, z 轴，可建立如图所示空间直角坐标系，



则 $A(2,-1,0)$，$B(0,1,0)$，$E(1,0,\sqrt{2})$，$\therefore \overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{BE}=(1,-1,\sqrt{2})$，

$\because DO \perp$ 平面 ABC，$\therefore$ 平面 ABC 的一个法向量 $\overrightarrow{m}=(0,0,1)$；

设平面 ABE 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n_1}=-2x_1+2y_1=0 \\ \overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{n_1}=x_1-y_1+\sqrt{2}z_1=0 \end{cases}$，令 $x_1=1$，解得：$y_1=1$，$z_1=0$，$\therefore \overrightarrow{n_1}(1,1,0)$，

$\therefore \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n_1}=0$，即 $\overrightarrow{m}\perp\overrightarrow{n_1}$，$\therefore$ 平面 $ABE \perp$ 与平面 ABC。

（2）设在线段 BC 上存在点 $F(0,t,0)(-1 \le t \le 1)$，使得平面 AEF 与平面 ABE 夹角的余弦值等于 $\dfrac{5\sqrt{43}}{43}$，

由（1）得：$\overrightarrow{EF}=(-1,t,-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AE}=(-1,1,\sqrt{2})$，

设平面 AEF 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases} \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{n_2}=-x_2+y_2+\sqrt{2}z_2=0 \\ \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{n_2}=-x_2+ty_2-\sqrt{2}z_2=0 \end{cases}$，令 $y_2=1$，则 $x_2=\dfrac{t+1}{2}$，$z_2=\dfrac{\sqrt{2}(t-1)}{4}$，

$\therefore \overrightarrow{n_2}=\left(\dfrac{t+1}{2},1,\dfrac{\sqrt{2}(t-1)}{4}\right)$；$\therefore \overrightarrow{n_1}(1,1,0)$

$$\therefore\left|\cos<\overline{n_1},\overline{n_2}>\right|=\frac{\left|\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}\right|}{\left|\overline{n_1}\right|\cdot\left|\overline{n_2}\right|}=\frac{\left|\frac{t+1}{2}+1\right|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+1+\frac{(t-1)^2}{8}}}=\frac{5\sqrt{43}}{43},$$

化简可得：$2t^2-13t-7=0$，解得：$t=-\frac{1}{2}$ 或 $t=7$（舍），

$\therefore F\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$，$\therefore BF=\frac{3}{2}$，$\therefore\frac{BF}{BC}=\frac{3}{4}$；

综上所述：在线段 BC 上存在点 F，满足 $\frac{BF}{BC}=\frac{3}{4}$，使得平面 AEF 与平面 ABE 夹角的余弦值等于 $\frac{5\sqrt{43}}{43}$．

20．(1)答案见解析
(2)乙排 1 号，理由见解析

（1）求出 X 的可能取值及对应的概率，得到分布列；
（2）在（1）的基础上，求出男甲排 1 号时的期望值，再求出男甲排 1 号时的期望值，比较后得到结论．

（1）X 的可能取值为 $0,1,2$，

$P(X=0)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{9}$，$P(X=1)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}$，

$P(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$，

故分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

（2）由（1）知，甲排 1 号时，期望值为 $E(x)=0\times\frac{1}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{4}{9}=\frac{4}{3}$，
设 Y 表示男乙排 1 号时，该队第一局和男女混双两局比赛获胜局数，

则 Y 的可能取值为 $0,1,2$，

则 $P(Y=0)=\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{2}{25}$，$P(Y=1)=\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{11}{25}$，

$P(Y=2)=\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{25}$,

故期望值为 $E(Y)=0\times\frac{2}{25}+1\times\frac{11}{25}+2\times\frac{12}{25}=\frac{7}{5}$,

因为 $\frac{4}{3}<\frac{7}{5}$，故乙排 1 号时期望值更大.

21．(1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；(2) 存在，方程为 $x^2+y^2=\frac{4}{5}$.

(1) 根据条件，列出关于 a,b 的方程组，求椭圆的标准方程；(2) 当斜率存在时，设直线 $y=kx+m$，与椭圆方程联立，得到韦达定理，结合直线与圆相切，得到 $r^2=\frac{m^2}{1+k^2}$，并代入 $\overline{OA}\cdot\overline{OB}$ 的坐标表示，利用定值与 k 无关，求得圆的方程，当斜率不存在时，可直接求得点 A,B 的坐标，得到 $\overline{OA}\cdot\overline{OB}$ 的值，求得圆的的方程.

(1) 由题意知 $M(0,b)$，$N(a,0)$，由 $\frac{1}{2}ab=1$，得 $ab=2$ ①.

设直线 $y=x$ 与椭圆 C 交于点 $P(x_0,x_0)$，$Q(-x_0,-x_0)$，则 $|PQ|^2=8x_0^2$.

把 $P(x_0,x_0)$ 代入椭圆方程，得 $x_0^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$,

故 $|PQ|^2=\frac{8a^2b^2}{a^2+b^2}=\left(\frac{4\sqrt{10}}{5}\right)^2$，即 $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{4}{5}$ ②.

由①②，解得 $\begin{cases}a^2=4\\b^2=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a^2=1\\b^2=4\end{cases}$(舍去)，所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2) 假设存在这样的圆 O，设 $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\lambda$.

当直线 AB 的斜率存在时，设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$.

由 $\begin{cases}y=kx+m\\\frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}$.

故 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\left(1+k^2\right)x_1x_2+km\left(x_1+x_2\right)+m^2=\left(1+k^2\right)\dfrac{4m^2-4}{1+4k^2}+km\left(-\dfrac{8km}{1+4k^2}\right)+m^2=$

$\dfrac{5m^2-4k^2-4}{1+4k^2}=\lambda$ ③.

由 $r=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，得 $r^2=\dfrac{m^2}{1+k^2}$ ④.

由③④，得 $\lambda=\dfrac{\left(5r^2-4\right)\left(k^2+1\right)}{1+4k^2}$，当 λ 与 k 无关时，$\lambda=0$，$r^2=\dfrac{4}{5}$，

即圆 O 的半径为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

当直线 AB 的斜率不存在时，若直线 AB 的方程为 $x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

将其代入椭圆 C 的方程，得 $A\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$，$B\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5},-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$，

此时 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.

若直线 AB 的方程为 $x=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，同理可得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.

综上，存在满足题意的圆 O，其方程为 $x^2+y^2=\dfrac{4}{5}$.

解决存在性问题的注意事项:

（1）存在性问题，先假设存在，推证满足条件的结论，若结论正确则存在，若结论不正确则不存在;

（2）当条件和结论不唯一时，要分类讨论;

（3）当给出结论而要推导出存在的条件时，先假设成立，再推出条件;

（3）当条件和结论都未知，按常规方法解题很难时，要思维开放，采取另外的途径。

22．（1）极大值为 $\ln 2$，无极小值；（2）①$\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$；②见解析.

（1）先对函数求导，然后结合导数的几何意义及直线垂直时斜率的关系可求 m，然后结合单调性可求极值；来源：高三答案公众号

（2）①由已知可得 $\ln\left(2x-1\right)-m\left(2x-1\right)<0$ 对任意的 $x>\dfrac{1}{2}$ 恒成立，分离参数后通过构造函数，转化为求解相应函数的最值，结合导数可求;

②结合①可得 $\ln\left(2x-1\right)<\dfrac{2\left(2x-1\right)}{5}$ 对任意的 $x>\dfrac{1}{2}$ 恒成立，赋值 $k=2x-1\left(k\in N^*\right)$，可得 $\ln k<\dfrac{2k}{5}$，然后结合对数的运算性质可求.

(1) $\because f(x)=\ln(2x-1)-m(2x-1)+1$，$\therefore f'(x)=\dfrac{2}{2x-1}-2m$，

由已知可得 $f'(2)=\dfrac{2}{3}-2m=-\dfrac{1}{3}$，解得 $m=\dfrac{1}{2}$.

则 $f(x)=\ln(2x-1)-x+\dfrac{3}{2}$，$f'(x)=\dfrac{2}{2x-1}-1=\dfrac{3-2x}{2x-1}$，其中 $x>\dfrac{1}{2}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=\dfrac{3}{2}$.

当 $x>\dfrac{3}{2}$ 时，$f'(x)<0$；当 $\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}$ 时，$f'(x)>0$.

所以，函数 $y=f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，单调递减区间为 $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.

所以，函数 $y=f(x)$ 的极大值为 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\ln 2-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}=\ln 2$，无极小值；

(2) ①由条件知，只需 $f(x)<1$，即 $\ln(2x-1)-m(2x-1)<0$ 对任意的 $x>\dfrac{1}{2}$ 恒成立，

即 $m(2x-1)>\ln(2x-1)$，其中 $x>\dfrac{1}{2}$.

令 $t=2x-1>0$，则 $mt>\ln t$，即 $mt>\ln t\Rightarrow m>\dfrac{\ln t}{t}$.

构造函数 $g(t)=\dfrac{\ln t}{t}$，则 $g'(t)=\dfrac{1-\ln t}{t^2}$，令 $g'(t)=0$，得 $t=e$，列表如下：

t	$(0,e)$	e	$(e,+\infty)$
$g'(t)$	+	0	−
$g(t)$	↗	极大值	↘

所以，函数 $y=g(t)$ 的单调递增区间为 $(0,e)$，单调递减区间为 $(e,+\infty)$.

所以，$g(t)_{\max}=g(e)=\dfrac{1}{e}$，$\therefore m>\dfrac{1}{e}$，因此，实数 m 的取值范围是 $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$；

②由①可知，当 $m=\dfrac{2}{5}$ 时，$\ln(2x-1)<\dfrac{2(2x-1)}{5}$ 对任意的 $x>\dfrac{1}{2}$ 恒成立，

令 $k=2x-1\ (k\in N^*)$，则 $\ln k<\dfrac{2k}{5}$，

所以 $\ln 1+\ln 2+\ln 3+\cdots+\ln(2n)<\dfrac{2}{5}(1+2+3+\cdots+2n)=\dfrac{2n(1+2n)}{5}<\dfrac{4n(n+1)}{5}$.

所以 $\ln\left[(2n)!\right]<\dfrac{4n(n+1)}{5}$.

本题主要考查了利用导数的几何意义求解参数及利用分离法求解参数范围问题，体现了转化思想的应用，属于难题.