

绵阳市高中 2020 级第三次诊断性考试 文科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

CABBA CDDCA CB

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 3 14. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 15. $\frac{4}{3}$ 16. $\frac{1}{2}$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.

17. 解：(1) 用平均数估计总体，

在某个销售门店春季新款的年销售额的是 33 万元，…………… 2 分

用中位数估计总体，

在某个销售门店春季新款的年销售额的是 31.5 万元. …………… 4 分

(2) 6 个销售门店分别记为 A, B, C, D, E, F .

年销售额不低于 40 万元的有： A, D . …………… 5 分

从 A, B, C, D, E, F 中随机抽取 2 个，基本事件为： $\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{A, F\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{B, F\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{C, F\}, \{D, E\}, \{D, F\}, \{E, F\}$ ，共计 15 个基本事件. …………… 8 分

事件：“恰好抽到 1 个门店的年销售额不低于 40 万元”包含的基本事件为：

$\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, E\}, \{A, F\}, \{B, D\}, \{C, D\},$

$\{E, D\}, \{F, E\}$ ，…………… 10 分

\therefore 所求概率为 $P = \frac{8}{15}$. …………… 12 分

18. 解：(1) 证明：如图，取 AC 的中点为 O ，连接 BO, PO .

$\because PA=PC, \therefore PO \perp AC$ ，…………… 1 分

$\because PA=PC=2\sqrt{2}, AC=4, \therefore \angle APC=90^\circ$ ，…………… 2 分

$\therefore PO = \frac{1}{2} AC = 2$ ，同理 $BO = 2$ ，…………… 3 分

又 $PB=2\sqrt{2}$ ，则 $PO^2 + OB^2 = PB^2$ ，

$\therefore PO \perp OB$ ，…………… 4 分

$\because AC \cap OB = O, AC, OB \subset$ 平面 ABC ，

$\therefore PO \perp$ 平面 ABC ，…………… 5 分

文科数学参考答案 第 1 页 共 5 页

又 $PO \subset$ 平面 PAC ,
 \therefore 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ;6 分

(2) \because 点 M 是线段 AP 上, 且 $PM = \frac{1}{3}PA$,

过点 M 作 $MN \perp AC$, $MN \parallel PO$,7 分

$\therefore MN \perp$ 平面 ABC ,8 分

$$V_{P-MBC} = V_{P-ABC} - V_{M-ABC} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot (PO - MN) \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{3} \times 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9} . \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解: (1) 由 $S_n = \log_{\sqrt{3}}(T_n)$, 令 $n=1$,

$$\text{得 } a_1 = S_1 = \log_{\sqrt{3}}(T_1) = \log_{\sqrt{3}}(b_1) = \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3} = -2 ,$$

$$\therefore a_1 = -2 , \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{又 } \because a_4 = 4 = a_1 + 3d ,$$

$$\therefore \text{等差数列 } \{a_n\} \text{ 的公差 } d = 2 , a_n = 2n - 4 , \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = n^2 - 3n . \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2) 由 (1) 可知 $T_n = (\sqrt{3})^{n^2 - 3n}$,7 分

$$\because n \geq 2 \text{ 时, } T_{n-1} = (\sqrt{3})^{(n-1)^2 - 3(n-1)} = (\sqrt{3})^{n^2 - 5n + 4} , \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \because n \geq 2 \text{ 时, } b_n = \frac{T_n}{T_{n-1}} = (\sqrt{3})^{2n-4} = 3^{n-2} ; \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

当 $n=1$ 时, $b_1 = \frac{1}{3}$ 也满足上式,11 分

所以 $b_n = 3^{n-2} (n \in \mathbb{N}^*)$12 分

20. 解: (1) 当 $a=3$ 时, $f(x) = \ln x + x^2 - 3x$, $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x - 3$,2 分

因为切点为 $(1, -2)$, 所以切线斜率为: $k = f'(1) = 0$,3 分

所以曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 处切线的方程为: $y = -2$ 5 分

(2) $f'(x) = \frac{a-2}{x} + 2x - a = \frac{2x^2 - ax + a - 2}{x} = \frac{(x-1)(2x-a+2)}{x}$, 6分

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 1$ 或 $x = \frac{a}{2} - 1$, 7分

①当 $a \leq 4$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增,

此时 $f(1) = 1 - a$, $f(e) = (1 - e)a + e^2 + 2$,

当 $1 - a > 0$, 即 $a < 1$ 时, $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上无零点;

当 $\begin{cases} 1 - a \leq 0 \\ f(e) \geq 0 \end{cases}$, 即 $1 \leq a \leq \frac{e^2 - 2}{e - 1}$ 时, $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上有一个零点;

当 $f(e) < 0$, 即 $\frac{e^2 - 2}{e - 1} < a \leq 4$ 时, $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上无零点; 9分

②当 $\frac{a}{2} - 1 \geq e$, 即 $a \geq 2e + 2$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递减,

此时 $f(1) = 1 - a < 0$, $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上无零点. 10分

③当 $4 < a < 2e + 2$ 时, $f(x)$ 在 $[1, \frac{a}{2} - 1]$ 上单调递减, 在 $[\frac{a}{2} - 1, e]$ 上单调递增,

此时 $f(1) = 1 - a < 0$, $f(e) = (1 - e)a + e^2 + 2 < 0$, $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上无零点. 11分

综上: 当 $a \leq 1$ 或 $a > \frac{e^2 - 2}{e - 1}$ 时, $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上无零点;

当 $1 \leq a \leq \frac{e^2 - 2}{e - 1}$ 时, $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上有一个零点. 12分

21. 解: (1) 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 直线 $l: y = x - 2$, 1分

联立方程 $\begin{cases} x = y + 2 \\ y^2 = 2px \end{cases}$, 整理得: $y^2 - 2py - 4p = 0$, 2分

由韦达定理: $\begin{cases} y_1 + y_2 = 2p \\ y_1 y_2 = -4p \end{cases}$, 3分

$|MN| = \sqrt{1+t^2} |y_1 - y_2| = \sqrt{1+t^2} \cdot \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2}$
 $= \sqrt{1+1^2} \cdot \sqrt{4p^2 + 16p} = 3\sqrt{2}$, 4分

解得: $p = \frac{1}{2}$, 故抛物线的方程为: $y^2 = x$ 5分

(2) 延长 PN 交 x 轴于点 Q , 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, $P(x_3, y_3)$,

设直线 MN 的方程为: $x=ty+2$, 6 分

联立直线 MN 与抛物线 C 方程可得: $\begin{cases} x=ty+2 \\ y^2=x \end{cases}$, 整理得: $y^2-ty-2=0$,

由根与系数的关系: $y_1 y_2 = -2$ ①, 8 分

同理, 联立直线 MP 与抛物线 C 方程可得: $\begin{cases} x=my+3 \\ y^2=x \end{cases}$,

整理得: $y^2-my-3=0$, 可得 $y_1 y_3 = -3$ ②, 10 分

由①②可知, $\frac{y_2}{y_3} = \frac{2}{3}$, 11 分

$\therefore \frac{|QN|}{|QP|} = \frac{|y_2|}{|y_3|} = \frac{2}{3}$ 12 分

22. 解: (1) 可得圆 C 的标准方程为: $(x-2)^2 + y^2 = 4$,

\therefore 圆 C 是以 $C(2, 0)$ 为圆心, 2 为半径的圆, 2 分

\therefore 圆 C 的参数方程为: $\begin{cases} x=2+2\cos\alpha \\ y=2\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数). 5 分

(2) $\because |AB| = 2\sqrt{2}$, 可得 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$, 6 分

不妨设点 A 所对应的参数为 α , 则点 B 所对应的参数为 $\alpha + \frac{\pi}{2}$,

$\therefore A(2+2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$, 则 $B(2+2\cos(\alpha+\frac{\pi}{2}), 2\sin(\alpha+\frac{\pi}{2}))$,

即 $B(2-2\sin\alpha, 2\cos\alpha)$, 7 分

$\therefore \begin{cases} x_1=2+2\cos\alpha \\ y_1=2\sin\alpha \end{cases}, \begin{cases} x_2=2-2\sin\alpha \\ y_2=2\cos\alpha \end{cases}$,

$\therefore x_1 x_2 + y_1 y_2 = (2+2\cos\alpha) \cdot (2-2\sin\alpha) + 2\sin\alpha \cdot 2\cos\alpha$ 8 分

$= 4 + 4(\cos\alpha - \sin\alpha) = 4 + 4\sqrt{2} \cos(\alpha + \frac{\pi}{4})$, 9 分

$\because \alpha \in [0, 2\pi]$, 则 $\alpha + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$,

\therefore 当 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = 1$, 即 $\alpha = \frac{7\pi}{4}$ 时, $x_1 y_1 + x_2 y_2$ 的最大值为 $4 + 4\sqrt{2}$ 10 分

23. 解: (1) 由 $a=1$, 则 $2b+3c=3$,

由柯西不等式, 得 $(2b+3c)\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right] \geq (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2$, 2分

$\therefore (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \leq 3 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{2}$, 3分

$\therefore \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \frac{\sqrt{10}}{2}$, 当且仅当 $b = \frac{9}{10}$, $c = \frac{2}{5}$ 时等号成立. 5分

(2) $\because a+2b+3c=4$, 即 $2b+3c=4-a$,

又 $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 2$, 则 $\sqrt{b} + \sqrt{c} = 2 - \sqrt{a}$, 6分

又由 (1) 可得: $(2b+3c)\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right] \geq (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2$, 7分

$\therefore (4-a)\frac{5}{6} \geq (2-\sqrt{a})^2$, 即 $11a - 24\sqrt{a} + 4 \leq 0$, 8分

令 $\sqrt{a}=t$, 所以 $11t^2 - 24t + 4 \leq 0$,

解得: $\frac{2}{11} \leq t \leq 2$, 即 $\frac{4}{121} \leq a \leq 4$, 9分

又 $2b+3c=4-a$, 且 $b>0, c>0$,

$\therefore 4-a>0$, 即 $a<4$,

综上所述, $\frac{4}{121} \leq a < 4$ 10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

