郑州市2021年高中毕业年级第三次质量预测
文科数学试题卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

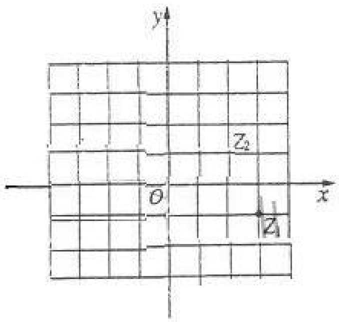
第Ⅰ卷(选择题，共60分)

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若全集 $U=\mathbf{R}$，$M=\{x\mid y=\ln(1-x)\}$，$N=\left\{x\mid y=\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right\}$，则

A. $M\subseteq N$　　B. $N\subseteq M$　　C. $N\subseteq \complement_U M$　　D. $\complement_U M\subseteq N$

2. 如图，在复平面内，网格中的每个小正方形的边长都为1，两点 Z_1、Z_2 对应的复数分别为 z_1、z_2，则复数 $\frac{z_1}{z_2}$ 的虚部为



A. -1　　B. $-i$

C. 1　　D. i

3. 古希腊数学家阿基米德在《论球和圆柱》中，运用穷竭法证明了与球的面积和体积相关的公式.其中包括他最得意的发现——“圆柱容球”.设圆柱的高为2，且圆柱以球的大圆(球大圆为过球心的平面和球面的交线)为底，以球的直径为高.则球的表面积与圆柱的体积之比为

A. 4∶3　　B. 3∶2　　C. 2∶1　　D. 8∶3

4. 函数① $f(x)=x+\sin x$，② $f(x)=\sin x+\cos x$，③ $f(x)=\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$，④ $f(x)=\cos^2(x+\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2}$ 中，是奇函数且在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 上单调递减的函数的序号是

A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④

5. 已知函数 $f(x)=\frac{4^x-1}{2^x}$，$a=f(2^{0.3})$，$b=f(0.2^{0.3})$，$c=f(\log_{0.3}2)$，则 a,b,c 的大小关系为

A. $c<b<a$　　B. $b<a<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

6. 在矩形 $ABCD$ 中，其中 $AB=3$，$AD=1$，AB 上的点 E 满足 $\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{BE}=\mathbf{0}$，$F$ 为 AD 上任意一点，则 $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{BF}=$

A. 1　　B. 3　　C. -1　　D. -3

7. 已知圆 M 过点 $A(1,3)$、$B(1,-1)$、$C(-3,1)$，则圆 M 在点 A 处的切线方程为

A. $3x+4y-15=0$　　B. $3x-4y+9=0$

C. $4x+3y-13=0$　　D. $4x-3y+5=0$

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，α 为第四象限角，角 α 的终边与单位圆 O 交于点 $P(x_0,y_0)$，若 $\cos(\alpha-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $x_0=$

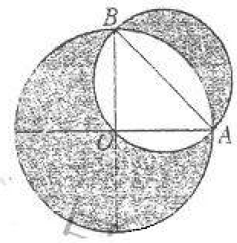
A. $\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6}$

C. $\frac{\sqrt{6}+3}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{6}-3}{6}$

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=1$，$S_n=a_{n+1}-3$，若 $S_k\geqslant125$，则 k 的最小值为

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

10. 公元前5世纪下半叶开奥斯的希波克拉底解决了与"化圆为方"有关的化月牙为方问题. 如图，$\triangle OAB$ 为等腰直角三角形，$AO\perp BO$，以 O 为圆心、以 OA 为半径作大圆 O，以 AB 为直径作小圆. 在整个图形中随机取一点，此点取自阴影部分的概率为



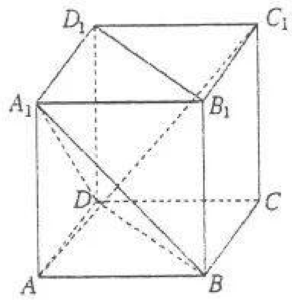
A. $\frac{\pi+2}{2\pi+1}$　　B. $\frac{\pi+1}{\pi-2}$

C. $\frac{\pi+1}{2\pi-1}$　　D. $\frac{\pi-1}{2\pi+1}$

11. 已知奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的导数为 $f'(x)$，且当 $x\in(-\infty,0]$ 时，$f'(x)<1$，则不等式 $f(2x-1011)-f(x+1010)\geqslant x-2021$ 的解集为

A. $(2021,+\infty)$　　B. $[2021,+\infty)$　　C. $(-\infty,2021]$　　D. $(-\infty,2021)$

12. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，下面结论错误的是



A. B_1D_1 // 平面 A_1BD

B. $AC_1\perp$ 平面 A_1BD

C. 异面直线 DA_1 与 B_1D_1 所成角为 $\frac{\pi}{3}$

D. 直线 AC_1 与平面 ADD_1A_1 所成角为 $\frac{\pi}{4}$

第Ⅱ卷(非选择题,共90分)

二、填空题:本大题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y\leqslant 0, \\ x-2y+2\geqslant 0, \\ 3x+2y+6\geqslant 0, \end{cases}$ 则 $z=x-2y$ 的最大值为________.

14. 函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程经过点 $(0,0)$,则 $x_0=$________.

15. 已知圆 $(x-1)^2+y^2=4$ 与双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线相交于四个点,按顺时针排列依次记为 M,N,P,Q,且 $|MN|=2|PQ|$,则 C 的离心率为________.

16. 1967年,法国数学家蒙德尔布罗的文章《英国的海岸线有多长?》标志着几何概念从整数维到分数维的飞跃. 1977年他正式将具有分数维的图形成为"分形",并建立了以这类图形为对象的数学分支——分形几何. 分形几何不只是扮演着计算机艺术家的角色,事实表明它们是描述和探索自然界大量存在的不规则现象的工具.

下面我们用分形的方法来得到一系列图形,如图1,线段 AB 的长度为1,在线段 AB 上取两个点 C,D,使得 $AC=DB=\dfrac{1}{3}AB$,以 CD 为一边在线段 AB 的上方做一个正三角形,然后去掉线段 CD,得到图2中的图形;对图2中的线段 EC、ED 作相同的操作,得到图3中的图形;依此类推,我们就得到了以下一系列图形:

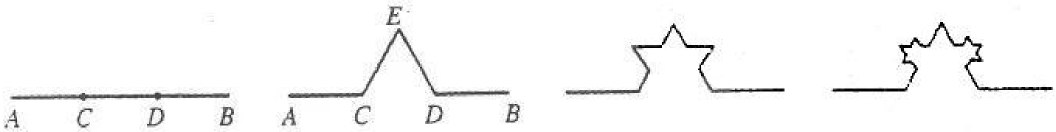


图1　　图2　　图3　　图4

记第 n 个图形(图1为第1个图形)中的所有线段长的和为 S_n,对任意的正整数 n,都有 $S_n<a$,则 a 的最小值为________.

三、解答题:共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答. 第22、23题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:每题12分,共60分.

17. (本小题满分12分)

在△ABC 中,角 A,B,C 所对边分别为 a,b,c,现有下列四个条件:① $b=\sqrt{6}$;② $c=2$;③ $a^2+b^2-c^2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}ab$;④ $\cos 2A-\sqrt{3}\cos A=2$.

(Ⅰ)③④两个条件可以同时成立吗?请说明理由;

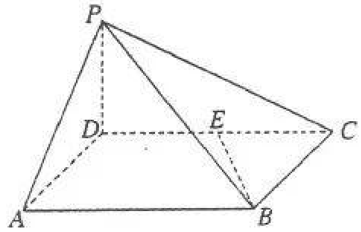
(Ⅱ)已知△ABC 同时满足上述四个条件中的三个,请选择使△ABC 有解的三个条件,求△ABC 的面积.(注:如果选择多个组合作为条件分别解答,按第一个解答计分.)

18.（本小题满分 12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PD=AD=\frac{1}{2}AB=1$，$PD\perp$平面 $ABCD$，E 为 CD 的中点.

（Ⅰ）线段 PC 上是否存在一点 F，使得 $BE\perp AF$；

（Ⅱ）在（Ⅰ）的条件下，求点 E 到平面 ADF 的距离.



19.（本小题满分 12 分）

2021 年 5 月 19 日是第 11 个"世界家庭医生日". 某地区自 2016 年开始全面推行家庭医生签约服务. 已知该地区人口为 1000 万，从 1 岁到 101 岁的居民年龄结构的频率分布直方图如图 1 所示. 为了解各年龄段居民签约家庭医生的情况，现调查了 1000 名年满 18 周岁的居民，各年龄段被访者签约率如图 2 所示：

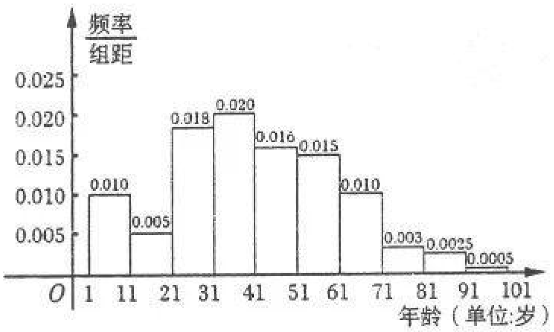


图 1

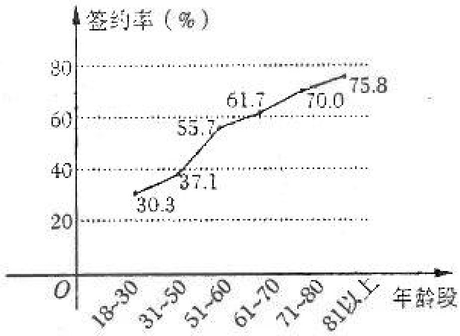


图 2

（Ⅰ）国际上通常衡量人口老龄化的标准有以下四种：①60 岁以上人口占比达到 7%以上；②少年人口（14 岁以下）占比 30%以下；③老少比 30%以上；④人口年龄中位数在 30 岁以上. 请任选两个角度分析该地区人口分布现状；

（Ⅱ）估计该地区年龄在 71－80 岁且已签约家庭医生的居民人数；

（Ⅲ）据统计，该地区被访者的签约率约为 44%，为把该地区年满 18 岁居民的签约率提高到 55%以上，应着重提高图 2 中哪个年龄段的签约率？并结合数据对你的结论作出解释.

20.（本小题满分 12 分）

已知 $f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{e^x}$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）求证曲线 $y=f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上不存在斜率为 -2 的切线.

21.（本小题满分 12 分）

椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $(0,1)$，离心率是 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. 若斜率为 k 的直线 l 与椭圆交于不同的两点 E、G.

（Ⅰ）求椭圆的标准方程；

（Ⅱ）设 $P(-2,0)$，直线 PE 与椭圆的另一个交点为 M，直线 PG 与椭圆的另一个交点为 N. 若 M、N 和点 $Q\left(-\dfrac{7}{4},\dfrac{1}{4}\right)$ 共线，求 k.

(二)选考题:共 10 分.请考生在第 22、23 两题中任选一题做答,如果多做,则按所做的第一题记分.

22.(本小题满分 10 分)[选修 4—4:坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系 xOy 中,以坐标原点为极点,x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$,曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2(1+3\sin^2\theta)=4$.

(Ⅰ)写出直线 l 和曲线 C 的直角坐标方程;

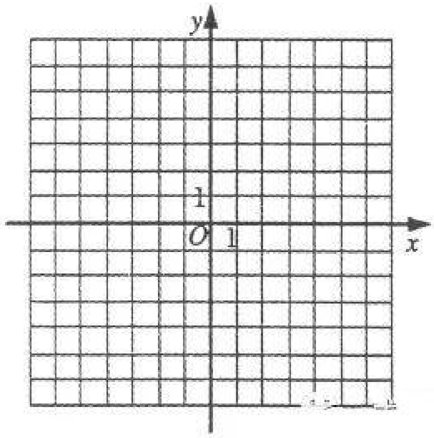
(Ⅱ)已知点 $A(1,0)$,若直线 l 与曲 C 线交于 P,Q 两点,PQ 中点为 M,求 $\frac{|AP|+|AQ|}{|AM|}$ 的值.

23.(本小题满分 10 分)[选修 4—5:不等式选讲]

已知函数 $f(x)=|x+1|-|2x-4|$.

(Ⅰ)在平面直角坐标系中画出函数 $f(x)$ 的图象;

(Ⅱ)若对 $\forall x\in\mathbf{R}$,$f(x)\leqslant t$ 恒成立,t 的最小值为 m,且正实数 a,b,c 满足 $a+2b+3c=m$,求 $\frac{1}{a+c}+\frac{2}{b+c}$ 的最小值.



2020-2021 高三三测文科数学评分参考

一、选择题

DACDA　DAABA　CD

二、填空题

13. $\frac{6}{5}$;　　14. $\sqrt{e}$;　　15. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$;　　16.2.

三、解答题

17.（1）由条件④ $\cos 2A-\sqrt{3}\cos A=2$，可得 $2\cos^2 A-\sqrt{3}\cos A-3=0$，

解得或 $\cos A=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，或 $\sqrt{3}$（舍去）……………………2 分

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{5\pi}{6}$；由条件③ $a^2+b^2-c^2=\frac{2\sqrt{3}}{3}ab$，可得 $\cos C=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

因为 $\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{3}$，……………………4 分

于是与 $A+C>\pi$ 矛盾，所以 ΔABC 不能同时满足③④……………………5 分

（2）因为 ΔABC 同时满足上述条件中的三个，不能同时满足③④，

则满足三角形有解的所有组合为①②③①②④，……………………6 分

若选择①②③：$b=\sqrt{6}$，$c=2$，$\cos C=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\sin C=\frac{\sqrt{6}}{3}$ ……………………8 分

因为 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，所以 $\sin B=1$ ……………………10 分

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{2}$，所以 ΔABC 为直角三角形……………………11 分

所以 $a=\sqrt{2}$，所以 ΔABC 的面积为 $S=\sqrt{2}$ ……………………12 分

若选组合①②④：$b=\sqrt{6}$，$c=2$，$A=\frac{5\pi}{6}$，所以 ΔABC 的面积为 $S=\frac{\sqrt{6}}{2}$……12 分

18.解：证明：(1) PC 上存在一点 F，此点是 PC 的中点……………………1 分

取 PC 中点 F，连接 EF、AE、DF、AF，$\because PD\perp$ 平面 $ABCD$，$PD // EF$.

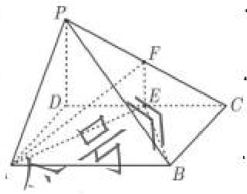
$\therefore EF\perp$ 平面 $ABCD$，又 $BE\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore EF\perp BE$．而 $ABCD$ 为矩形, $AD=1$，

$AB=2$，故 $BE=AE=\sqrt{2}$，

∴在△ABE中，$AE^2+BE^2=AB^2$，即 $AE\perp BE$.……………………………4 分

又 $AE\cap EF=E$，则 $BE\perp$ 平面 AEF，又 $AF\subset$ 面 AEF，

∴. $BE\perp AF$ ………………………………………… ………………6 分



(2) $V_{E-ADF}=V_{F-ADE}$， ……………………………………… ………………7 分

因为 $V_{F-ADE}=\dfrac{1}{12}$ ……………………………………… ………………9 分

$S_{\Delta ADF}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ ……………………………………………………………10 分

设点 E 到平面 AEF 的距离为 h,所以 $h=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ……………………………………12 分

19 解：（1）①60 岁以上人口比例是：（0.01+0.003+0.003）×10=0.16;

②少年（14 岁以下）人口比例：小于 0.1+0.05=0.15;

③老少比：0.16:0.15>30%;

④由于 1-41 岁人口比例 0.53，所以年龄中位数在 31-40 岁范围内.

所以由以上四条中任意两条均可分析出该地区人口已经老龄化(考生答对两条即可,每条 2 分)………………………………4 分

（2）0.03×1000 万×70%=21 万人……………………………………………………6 分

（3）由图 1、2 可知该地区年龄段 18-30 岁的人口为 180-230 万之间，签约率为 30.3%;

年龄段 31-50 岁的人口数为（0.20+0.16）×1000 万=360 万，签约率为 37.1%;

年龄段 51-60 岁的人口数为 0.15×1000 万=150 万，签约率为 55.7%;

年龄段 61-70 岁的人口数为 0.1×1000 万=100 万，签约率为 61.7%;

年龄段 71-80 岁的人口数为 0.03×1000 万=30 万，签约率为 70%;

年龄段 80 岁以上的人口数为 0.03×1000 万=30 万，签约率为 75.8%.

由以上数据可知，这个地区在 31-50 岁这个年龄段人数为 360 万，基数较其他地区是最大的，且签约率仅为 37.1，比较低，所以应着重提高此年龄段的签约率………………………12 分

20.解：（1）$f'(x)=\dfrac{-2\sin x}{e^x}$， ……………………………………………………1 分

令 $f'(x)>0$，则 $2\sin x<0$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是:$(\pi+2k\pi,2\pi+2k\pi)k\in Z$;……………………………3 分

单调递减区间是：$(2k\pi,\pi+2k\pi)k\in Z$. ………………………………………………

(2)原命题等价于：在区间$(0,\frac{\pi}{2})$上方程$\frac{-2\sin x}{e^x}=-2$无解……6分

令$g(x)=\frac{\sin x}{e^x}$，则$g'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}=\frac{\sin(\frac{\pi}{4}-x)}{e^x}$；……8分

当$x\in(0,\frac{\pi}{4})$时，$g'(x)>0$，所以$g(x)$的单调递增区间是$(0,\frac{\pi}{4})$；

同理，$g(x)$单调递减区间是$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$；……10分

因为$g(x)$的最大值是$g(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}<1$，所以不存在斜率为-2的切线……12分

21解：（1）b=1，$e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{2}{3},\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3},a=\sqrt{3}$……2分

$\frac{x^2}{3}+y^2=1$. ……4分

(2)设$E(x_1,y_1),F(x_2,y_2),M(x_3,y_3),N(x_4,y_4)$,则$x_1^2+3y_1^2=3$， ①$x_2^2+3y_2^2=3$， ②

又$P(-2,0)$，所以可设$k_1=k_{PE}=\frac{y_1}{x_1+2}$，直线$PE$的方程为$y=k_1(x+2)$，

由$\begin{cases}y=k_1(x+2)\\ \frac{x^2}{3}+y^2=1\end{cases}$消去$y$可得$(1+3k_1^2)x^2+12k_1^2x+12k_1^2-3=0$，……6分

则$x_1+x_3=-\frac{12k_1^2}{1+3k_1^2}$，即$x_3=-\frac{12k_1^2}{1+3k_1^2}-x_1$，

又$k_1=\frac{y_1}{x_1+2}$，代入①式可得$x_3=\frac{-7x_1-12}{4x_1+7}$，所以$y_3=\frac{y_1}{4x_1+7}$，

所以，$M(\frac{-7x_1-12}{4x_1+7},\frac{y_1}{4x_1+7})$同理可得$N(\frac{-7x_2-12}{4x_2+7},\frac{y_2}{4x_2+7})$,……10分

又因为$Q\left(-\frac{7}{4},\frac{1}{4}\right)$，由$Q$、$M$、$N$三点共线，

可得$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=1$，即$k=1$……12分

22.解：（1）因为直线$l:\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故$\rho\cos\theta-\rho\sin\theta-1=0$，

即直线l的直角坐标方程为$x-y-1=0$……2分

因为曲线C：$\rho^2(1+4\sin^2\theta)=4$，则曲线$C$的直角坐标方程为$x^2+4y^2=4$，

即$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.........4 分

（2）设直线l的参数方程为$\begin{cases}x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$为参数），代入曲线$C$的直角坐标系方程得

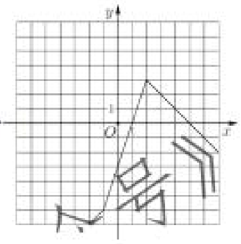
$5t^2+2\sqrt{2}t-6=0$.

设P，Q对应的参数分别为t_1，t_2，则$t_1t_2=-\frac{6}{5}$，$t_1+t_2=-\frac{2\sqrt{2}}{5}$，...............6 分

所以 M 对应的参数$t_0=\frac{t_1+t_2}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{5}$，

故$\frac{|AP|+|AQ|}{|AM|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_0|}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_0|}=\frac{\sqrt{(-\frac{2\sqrt{2}}{5})^2-4\cdot(-\frac{6}{5})}}{\frac{\sqrt{2}}{5}}=8$...............10 分

23.（1）$f(x)=\begin{cases}-x+5,x\ge 2\\ 3x-3,-1<x<2\\ x-5,x\le -1\end{cases}$，图像如下所示...............5 分



（2）由（1）知，$f(x)_{\max}=3$，所以$t\ge 3,m=3$，利用柯西不等式

$\frac{1}{a+c}+\frac{2}{b+c}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{4}{2b+2c}\right)\left[(a+c)+(2b+2c)\right]$

$\ge\frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{1}{a+c}}\cdot\sqrt{a+c}+\sqrt{\frac{4}{2b+2c}}\cdot\sqrt{2b+2c}\right)^2=3$.

所以$\frac{1}{a+c}+\frac{2}{b+c}$最小值为 3.当且仅当$a+c=b+c=1$时等号成立...............10 分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ‘’ 专业、专注、有态度 ‘’ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。