文科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

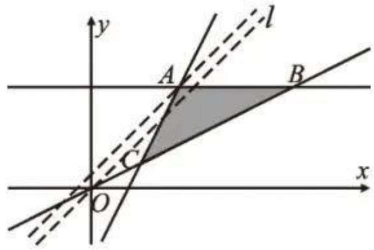
题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	C	A	B	D	C	A	C	A	B	D

1. B　由题意得，$B=\{x\in\mathbf{N}\mid(x-2)(x+4)<0\}=\{0,1\}$，$\therefore A\cap B=\{0,1\}$. 故选 B.

2. D　由题意得，$\dfrac{3i-5}{2+3i}=\dfrac{(3i-5)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\dfrac{6i+9-10+15i}{13}=-\dfrac{1}{13}+\dfrac{21}{13}i$，故其虚部为 $\dfrac{21}{13}$，故选 D.

3. C　该组数据的极差为34，中位数为29.5，平均数为 $30+\dfrac{1}{10}\times(-12-7-5-4-3+2+3+5+19+22)=32$，观察可知，①③正确，故选 C.

4. A　若 $f(x)=2x^2-mx+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f'(x)=4x-m+\dfrac{1}{x}\geqslant 0$，即 $4x+\dfrac{1}{x}\geqslant m$，则 $m\leqslant 4$，故选 A.



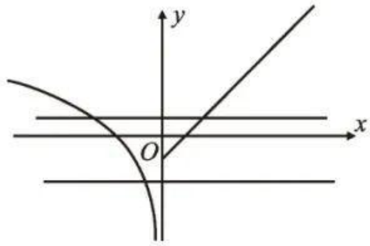
5. B　作出不等式组所表示的平面区域如图阴影部分所示，其中 $A\left(\dfrac{7}{2},4\right)$，$B(8,4)$，$C(2,1)$，作直线 $l:y=x$，平移直线 l，当其经过点 A 时，z 有最小值，即 $z_{\min}=\dfrac{7}{2}-4=-\dfrac{1}{2}$，故选 B.

6. D　$\because x=\sqrt{3}>1$，$0.5<y=0.5^{0.3}<0.5^0=1$，$z=\log_{0.2}0.5=\log_5 2<\log_5\sqrt{5}=0.5$，$\therefore z<y<x$，故选 D.

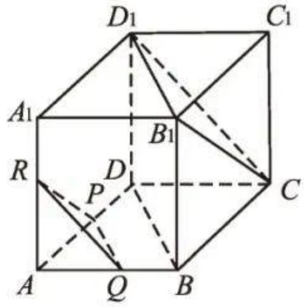
7. C　运行该程序，第一次，$S=8,a=3,b=8,n=3$；第二次，$S=19,a=8,b=19,n=2$；第三次，$S=46,a=19,b=46,n=1$；第四次，$S=111,a=46,b=111,n=0$，此时输出 S，故判断框中可以填 $n<1$，故选 C.

8. A　$\because\alpha$ 是第三象限角，$3\cos 2\alpha+\sin\alpha=2$，$\therefore 3(1-2\sin^2\alpha)+\sin\alpha=2$，$\therefore 6\sin^2\alpha-\sin\alpha-1=0$，解得 $\sin\alpha=-\dfrac{1}{3}$ 或 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$（舍去），$\therefore\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\therefore\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，故选 A.

9. C　令 $f(x)=t$，当 $f(t)=0$ 时，解得 $t=\frac{1}{2}$ 或 $t=-1$. 在同一直角坐标系中分别作出 $y=f(x), y=-1, y=\frac{1}{2}$ 的图象如图所示，观察可知，$y=f(x)$ 与 $y=-1$ 有1个交点，$y=f(x)$ 与 $y=\frac{1}{2}$ 有2个交点，则 $y=f\left(f(x)\right)$ 的零点个数为3，故选 C.



10. A　如图，过点 P 作 D_1B_1, B_1C 的平行线，分别交棱 AB, AA_1 于点 Q, R，连接 QR, BD，易知 $\triangle PQR$ 是等边三角形，且为截面，则 $\frac{1}{2}PQ^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，解得 $PQ=2$，$\therefore AP=\frac{\sqrt{2}}{2}PQ=\sqrt{2}$. 故选 A.



11. B　由题意得，$|MF_2|+|MN|=|MF_1|+2a+|MN|\geqslant|F_1N|+2a=b+2a$，当且仅当 M，F_1，N 三点共线时取等号，$\therefore |MF_2|+|MN|$ 的最小值为 $b+2a=10$，

$\therefore 10\geqslant 2\sqrt{2ab}$，即 $ab\leqslant\frac{25}{2}$，当且仅当 $b=2a=5$ 时，等号成立，

$\therefore S_{\triangle F_1NF_2}=2S_{\triangle F_1NO}=2\times\frac{1}{2}|NF_1|\cdot|NO|=ab\leqslant\frac{25}{2}$，故选 B.

12. D　由题意得，$2a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$，故 $\dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=\dfrac{\frac{a_{n+1}+a_n}{2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=-\frac{1}{2}$，且

$a_2-a_1=-9$，故 $a_{n+1}-a_n=-9\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，则

$$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$$

$$=-9\times\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{0}\right]+6=-9\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+6=6\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

则 $\{a_n\}$ 是首项为6，公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列，故

$$S_n=6\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=4\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right]，则 S_{2020}=4\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{2020}\right]=4-\frac{1}{2^{2018}},$$

故选 D.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 将答案填写在题中的横线上.）

13. -30

由题意得，$12=-3\lambda$，解得 $\lambda=-4$，故 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=(6,-2)$，故 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=-30$.

14. -2

对 $y=a-\ln x$ 求导得 $y'=-\dfrac{1}{x}$，$\therefore$ 曲线 $y=a-\ln x$ 在点 $(1,a)$ 处的切线方程为 $y-a=-(x-1)$，即 $y=-x+a+1$. 设 $y=-x+a+1$ 与 $y=-e^x$ 相切于点 $(x_0,-e^{x_0})$，对 $y=-e^x$ 求导得 $y'=-e^x$，$\therefore -e^{x_0}=-1$，$\therefore x_0=0$，即切点为 $(0,-1)$，它在切线 $y=-x+a+1$ 上，$\therefore a+1=-1$，$\therefore a=-2$.

15. 120°（或 $\dfrac{2\pi}{3}$）

由题意得，$|MF|=4$，由抛物线的定义知 $|PQ|=|PF|=y_P+2=\dfrac{8}{3}$，$\therefore y_P=\dfrac{2}{3}$，

$\therefore x_P=\pm\dfrac{4}{\sqrt{3}}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle FMQ$ 中，$|FQ|^2=|FM|^2+|MQ|^2=\dfrac{64}{3}$. $\because \triangle PFQ$ 为等腰三角形，$\therefore \cos\angle QPF=\dfrac{|PF|^2+|PQ|^2-|FQ|^2}{2|PF|\cdot|PQ|}=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore \angle QPF=120^\circ$.

16. 54π

设 $\triangle ABC$ 的中心为 G，连接 SG,BG，$\therefore SG\perp$ 平面 ABC，$\therefore SG\perp AC$，又 $AC\perp BG$，$\therefore AG\perp$ 平面 SBG，$\therefore AC\perp SB$，又 $SB\perp CD$，$\therefore SB\perp$ 平面 ACS. $\because S-ABC$ 为正三棱锥，$\therefore SA$，SB，SC 两两垂直，故外接球直径为 $3\sqrt{2}\times\sqrt{3}=3\sqrt{6}$，故三棱锥 $S-ABC$ 外接球的表面积为 $4\pi\times\left(\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2=54\pi$.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）$K^2=\dfrac{800\times(300\times150-150\times200)^2}{500\times300\times450\times350}\approx7.619<10.828$，……………………4 分

$\therefore$ 没有 99.9% 的把握认为佩戴口罩的态度与性别有关. ……………………6 分

（Ⅱ）男性中认为冬季佩戴口罩十分必要抽取 3 人，记为 a,b,c，男性中认为冬季佩戴口罩没有必要抽取 2 人，记为 A,B，故随机抽取 2 人，所有基本事件为：

$(a,b),(a,c),(a,A),(a,B),(b,c),(b,A),(b,B),(c,A),(c,B),(A,B)$，……9 分

其中事件“恰有1人认为冬季佩戴口罩十分必要”包含的基本事件为：

$(a,A),(a,B),(b,A),(b,B),(c,A),(c,B)$，

故所求概率 $P=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$. ……………………12 分

18.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）$\because c\sin A+\sqrt{3}a\sin\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=0$，$\therefore c\sin A+\sqrt{3}a\cos C=0$，

$\therefore \sin C\sin A+\sqrt{3}\sin A\cos C=0$，……………………2 分

$\because \sin A\neq 0$，$\therefore \tan C=-\sqrt{3}$，$\because 0<C<\pi$，$\therefore C=\frac{2\pi}{3}$，……………………3分

$\therefore\triangle ABC$ 外接圆的半径 $R=\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{\sin C}=\frac{1}{2}\times\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$，……………………5分

$\therefore\triangle ABC$ 外接圆的面积为 12π．……………………6 分

（Ⅱ）由正弦定理得，$\sin B=\frac{b\sin C}{c}=\frac{b\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}b}=\frac{1}{2}$，……………………7 分

$\because 0<B<\frac{\pi}{3}$，$\therefore B=\frac{\pi}{6}$，$\therefore A=\pi-B-C=\frac{\pi}{6}$．……………………9 分

在$\triangle ACM$中，由余弦定理得，$CM^2=AM^2+AC^2-2AM\cdot AC\cdot\cos A$，

解得 $CM=2$，……………………11 分

则 $\triangle ACM$ 的周长为 $4+2\sqrt{3}$．……………………12 分

19.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）$\because\triangle DAC$ 为等边三角形，且 E 为 DA 的中点，$\therefore CE\perp DA$．……………………1 分

$\because$平面 $DAB\perp$平面 DAC，平面 $DAB\cap$平面 $DAC=DA$，$CE\subset$平面 DAC，

$\therefore CE\perp$平面 DAB，$\because AB\subset$平面 DAB，$\therefore AB\perp CE$．……………………4 分

又 $AB\perp AC$，$CE\cap AC=C$，$AC,CE\subset$平面 DAC，

$\therefore AB\perp$平面 DAC，……………………5 分

$\because AD\subset$平面 DAC，$\therefore AB\perp AD$．……………………6 分

（Ⅱ）$\because AB\perp AC$，$AB\perp AD$，$AC\cap AD=A$，$\therefore AB\perp$平面 ACD．

$\because AB\perp AC$，$AC=2$，$\tan\angle CBA=\frac{1}{2}$，$\therefore AB=2AC=4$．……………………7 分

$\because\triangle DAC$ 是边长为 2 的等边三角形，且 E 为 DA 的中点，

$\therefore CE\perp DA$，$CE=DC\sin 60°=\sqrt{3}$，

$\therefore\triangle DEC$ 的面积 $S_{\triangle DEC}=\frac{1}{2}DE\cdot CE=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$．……………………9 分

由（Ⅰ）知，$CE\perp$平面 DAB，$\because BE\subset$平面 DAB，$\therefore CE\perp BE$，

$\therefore\triangle BEC$ 的面积为 $S_{\triangle ECB}=\frac{1}{2}CE\cdot BE=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{17}=\frac{\sqrt{51}}{2}$．……………………10 分

设点 D 到平面 BCE 的距离为 h，

$\because V_{B-CDE}=V_{D-BEC}$，$\therefore \frac{1}{3}S_{\triangle CDE}\cdot AB=\frac{1}{3}S_{\triangle ECB}\cdot h$，即 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{51}}{2}\times h$，

解得 $h=\frac{4\sqrt{17}}{17}$，即点 D 到平面 BCE 的距离为 $\frac{4\sqrt{17}}{17}$. ························12 分

20.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）由题意得，$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$，

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ························4 分

（Ⅱ）联立 $\begin{cases}y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+m\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，解得 $x^2-\sqrt{3}mx+m^2-1=0$，

其中 $\Delta=3m^2-4\left(m^2-1\right)=-m^2+4>0$，解得 $-2<m<2$，

又 $m\neq 0$ 且 $m\neq-\sqrt{3}$，$\therefore -2<m<-\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}<m<0$ 或 $0<m<2$. ·········6 分

设 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，则 $x_1+x_2=\sqrt{3}m$，$x_1x_2=m^2-1$，

$$\therefore k_1\cdot k_2=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+m+\frac{\sqrt{3}}{2}}{x_1+1}\cdot\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}x_2+m+\frac{\sqrt{3}}{2}}{x_2+1}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}x_1x_2-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(m+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x_1+x_2\right)+\left(m+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{x_1x_2+\left(x_1+x_2\right)+1}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}\left(m^2-1\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(m+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\sqrt{3}m+\left(m+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{m^2-1+\sqrt{3}m+1}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}m^2+\frac{\sqrt{3}}{4}m}{m^2+\sqrt{3}m}=\frac{1}{4}，$$ ························11 分

即 k_1k_2 是定值，且定值是 $\frac{1}{4}$. ························12 分

21.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）由题意得，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=a+1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{(a+1)x+1}{x}$.

当 $a\geqslant -1$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ………… 2 分

当 $a<-1$ 时，令 $f'(x)>0$，解得 $x<-\dfrac{1}{a+1}$；令 $f'(x)<0$，解得 $x>-\dfrac{1}{a+1}$，

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0,-\dfrac{1}{a+1}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\dfrac{1}{a+1},+\infty\right)$ 上单调递减. ……………5 分

（Ⅱ）方法一：要证 $\dfrac{2e^x}{xe^2}+1+(a+1)x>f(x)$，即证 $\dfrac{2}{e^2}\cdot\dfrac{e^x}{x}-\ln x>0$. …………6 分

令 $g(x)=\dfrac{2}{e^2}\cdot\dfrac{e^x}{x}-\ln x$，则 $g'(x)=\dfrac{2(x-1)e^x-e^2x}{e^2x^2}$. ……………………7 分

令 $r(x)=2(x-1)e^x-e^2x$，则 $r'(x)=2xe^x-e^2$，

易得 $r'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $r'(1)=2e-e^2<0$，$r'(2)=3e^2>0$，

$\therefore$ 存在唯一的实数 $x_0\in(1,2)$，使得 $r'(x_0)=0$，

$\therefore r(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增. ……………………9 分

$\because r(0)<0$，$r(2)=0$，$\therefore$ 令 $r(x)>0$，解得 $x>2$；令 $r(x)<0$，解得 $0<x<2$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore g(x)\geqslant g(2)=1-\ln 2>0$. ……………………11 分

综上，$\dfrac{2}{e^2}\cdot\dfrac{e^x}{x}-\ln x>0$，即 $\dfrac{2e^x}{xe^2}+1+(a+1)x>f(x)$. ……………………12 分

方法二：要证 $\dfrac{2e^x}{xe^2}+1+(a+1)x>f(x)$，即证 $\dfrac{2}{e^2}\cdot\dfrac{e^x}{x}>\ln x$，

即证 $\dfrac{2}{e^2}\cdot\dfrac{e^x}{x^2}>\dfrac{\ln x}{x}$. ……………………7 分

令 $g(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$，则 $g'(x)=\dfrac{e^x}{x^2}=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$，

易得 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore g(x)_{\min}=g(2)=\dfrac{e^2}{4}$，$\therefore\dfrac{2}{e^2}\cdot\dfrac{e^x}{x^2}\geqslant\dfrac{2}{e^2}\times\dfrac{e^2}{4}=\dfrac{1}{2}$. …………………… 9分

令 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $h'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

易得 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore h(x)_{\max}=h(e)=\dfrac{1}{e}<\dfrac{1}{2}$. ……………………11分

综上，$\frac{2}{e^2}\cdot\frac{e^x}{x^2}>\frac{\ln x}{x}$，即$\frac{2e^x}{xe^2}+1+(a+1)x>f(x)$. ……………………12分

请考生从第22、23题中任选一题作答. 注意：只能做选定的题目，如果多做，则按所做的第一题记分，解答时请写清题号.

22.（本小题满分10分）选修4–4：坐标系与参数方程

（Ⅰ）∵曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=1+\cos\alpha\\ y=\sqrt{3}+\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数），

消去α，得$(x-1)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=1$，即$x^2+y^2-2x-2\sqrt{3}y+3=0$，

将$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$代入上式得$\rho^2-2\rho\cos\theta-2\sqrt{3}\rho\sin\theta+3=0$，

即为曲线C的极坐标方程. ……………………5分

（Ⅱ）将$\theta=\theta_0$代入曲线C的极坐标方程，

得$\rho^2-2\rho\cos\theta_0-2\sqrt{3}\rho\sin\theta_0+3=0$. ……………………6分

设$M(\rho_1,\theta_0)$，$N(\rho_2,\theta_0)$，则$\rho_1+\rho_2=2\cos\theta_0+2\sqrt{3}\sin\theta_0$，………………7分

$\therefore|OM|+|ON|=\rho_1+\rho_2=2\cos\theta_0+2\sqrt{3}\sin\theta_0=4\sin\left(\theta_0+\frac{\pi}{6}\right)$. ……………8分

$\because\theta_0\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore\theta_0+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，$\therefore4\sin\left(\theta_0+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(2\sqrt{3},4\right]$，

即$|OM|+|ON|$的取值范围为$\left(2\sqrt{3},4\right]$. ……………………10分

23.（本小题满分10分）选修4–5：不等式选讲

（Ⅰ）∵函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，

$\therefore|2x-1|+|x-4|-m>0$，即$m<|2x-1|+|x-4|$在$x\in\mathbf{R}$上恒成立.

设$g(x)=|2x-1|+|x-4|$，则$g(x)=\begin{cases}-3x+5,x<\frac{1}{2}\\ x+3,\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant4\\ 3x-5,x>4\end{cases}$，

结合函数$g(x)$的图象可知$g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{2}$，

$\therefore m<\frac{7}{2}$，即集合$M=\left\{m\middle|m<\frac{7}{2}\right\}$. ……………………5分

（Ⅱ）由题意得，$0<a<\frac{7}{2}$，$0<b<\frac{7}{2}$，要证$\frac{a+b}{4ab+49}<\frac{1}{14}$，

即证$4ab+49>14(a+b)$，即证$4ab+49-14(a+b)>0$，

即证$(2a-7)(2b-7)>0$，……………8分

又$0<a<\frac{7}{2}$，$0<b<\frac{7}{2}$，$\therefore(2a-7)(2b-7)>0$，

故$\frac{a+b}{4ab+49}<\frac{1}{14}$得证. ……………………10分