试卷类型：A

梅州市高三总复习质检试卷（2021. 5）

数　学

本试卷共 6 页，满分 150 分，考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需要改动,用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．复数 z 满足 $(z-3)(2-i)=5$（i 为虚数单位），则 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 为

A．$2+i$　　B．$2-i$　　C．$5+i$　　D．$5-i$

2．设 A,B 是非空集合,则“$A\square B=A$”是“$A|\ \ B$”的

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充分必要条件　　D．既非充分条件也非必要条件

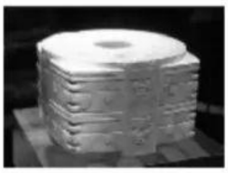
3．设点 P 是 ΔABC 平面内一点,且 $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BP}$, 则

A．$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$　　B．$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$　　C．$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$　　D．$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

4．F_1,F_2 是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$ 的左，右焦点，点 $P(2,3)$ 在 C 上，且 $F_1F_2\perp F_2P$，则双曲线 C 的离心率为

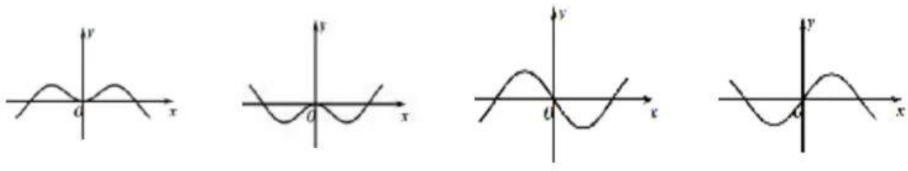
A．2　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\dfrac{1}{2}$

5．玉琮是一种内圆外方的筒型玉器，是古代人们用于祭祀神明的一种礼器，距今约5100年. 至新石器中晚期，玉琮在江浙一带的良渚文化、广东石峡文化、山西陶寺文化中大量出现，尤以良渚文化的玉琮最发达，出土与传世的数量很多. 现一仿古玉琮呈扁矮的方柱体，通高 $9.8cm$，内圆外方，上下端为圆面的射，中心有一上下垂直相透的圆孔，孔径 $5.9cm$，外径 $19.6cm$，试估计该仿古玉琮的体积约为（单位：cm^3）



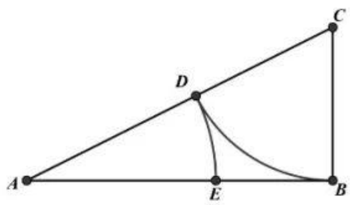
A．3300　　B．3700　　C．3900　　D．4500

6. 函数 $f(x)=\left(1-\frac{2}{1+e^{x}}\right)\cos x$ 的图象大致形状是



A. B. C. D.

7. 如图，古希腊雅典学派算法家道克萨斯提出“黄金分割”的理论，利用尺规作图可画出已知线段的黄金分割点，具体方法如下：



(1)取线段 $AB=2$，过点 B 作 AB 的垂线，并用圆规在垂线上截取 $BC=\frac{1}{2}AB$，连接 AC；(2)以 C 为圆心，CB 为半径画弧，交 AC 于点 D；(3)以 A 为圆心，以 AD 为半径画弧，交 AB 于点 E．则点 E 即为线段 AB 的黄金分割点．若在线段 AB 上随机取一点 F，则使得 $BE\le AF\le AE$ 的概率约为（参考数据：$\sqrt{5}\approx 2.236$）

A．0.472　　B．0.618　　C．0.236　　D．0.382

8. 设 x_1,x_2,x_3 均为正数，且 $2^{x_1}+\log_2 x_1=0$，$1+2^{x_2}\log_2 x_2=0$，$1-2^{x_3}\log_2 x_3=0$，则

A．$x_1<x_2<x_3$　　B．$x_3<x_2<x_1$

C．$x_3<x_1<x_2$　　D．$x_2<x_1<x_3$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9. 若 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>0$，下列不等式中正确的是

A．$a^2(1+b)<ab(1+a)$　　B．$a^3+b^3>2ab^2$

C．$\sqrt{b}-\sqrt{a}<\sqrt{b-a}$　　D．$\log_{a+2}3>\log_{b+1}3$

10．函数 $f(x)=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x+1$，下列选项中说法正确的是

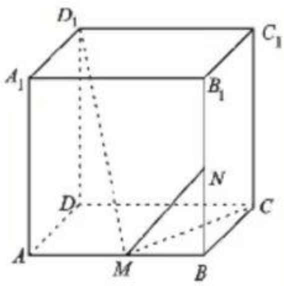
A．$f(x)+f(\frac{\pi}{3}-x)=2$

B．$f(\frac{\pi}{3}-x)$ 的图象关于 $x=-\frac{\pi}{12}$ 对称

C．若 $0<x_1<x_2<\frac{5\pi}{12}$，则 $f(x_1)<f(x_2)$

D．存在 $x_1,x_2,x_3\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$，使得 $f(x_1)+f(x_2)<f(x_3)$

11．如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=3$，点 M,N 分别在棱 AB 和 BB_1 上运动（不含顶点），若 $D_1M\perp MN$，下列命题正确的是



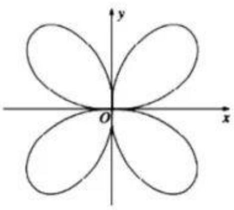
A．$MN\perp A_1M$

B．$MN\perp$ 平面D_1MC

C．线段 BN 长度的最大值为 $\frac{3}{4}$

D．三棱锥 $C_1-A_1D_1M$ 体积不变

12．曲线 $C:\left(x^2+y^2\right)^3=16x^2y^2$ 为四叶玫瑰线，它是一个几何亏格为零的代数曲线，这种曲线在苜蓿叶型立交桥的布局中有非常广泛的应用，苜蓿叶型立交桥有两层，将所有原来需要穿越相交道路的转向都由环形匝道来实现，即让左转车辆行驶环道后自右侧切向汇入高速公路，四条环形匝道就形成了苜蓿叶的形状。给出下列结论正确的是：



A．曲线 C 只有两条对称轴

B．曲线 C 经过 5 个整点（即横、纵坐标均为整数的点）

C．曲线 C 上任意一点到坐标原点 O 的距离都不超过 2

D．曲线 C 上的任一点作两坐标轴的垂线与两坐标轴围成的矩形面积最大值为 2

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．二项式$\left(x^2+\dfrac{3}{x}\right)^6$展开式中含$x^3$项的系数为__________．

14．为调动我市学生参与课外阅读的积极性，我市制定了《进一步加强中小学课外阅读指导的实施方案》，有序组织学生开展课外阅读活动．某校语文老师在班里开展了一次诗词默写比赛,班里40名学生得分数据的茎叶图如下图．若规定得分不低于85分的学生得到“诗词达人的”称号，低于85分且不低于70分的学生得到“诗词能手”的称号，其他学生得到“诗词爱好者”的称号．根据该次比赛的成绩，按照称号的不同，进行分层抽样抽选15名学生,则抽选的学生中获得“诗词能手”称号的人数为__________．

9	1 2 5 6 8
8	0 0 1 2 4 5 7 8
7	0 2 2 3 3 3 4 5 5 6 9
6	0 2 2 3 4 4 4 5 7 7 8 9
5	6 6 8 9

15．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$a_n+S_n=1$，则$\dfrac{S_1}{a_1}+\dfrac{S_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{S_8}{a_8}=$________．

16．已知F为抛物线$y^2=x$的焦点，点A,B在该抛物线上且位于x轴的两侧，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$（其中点$O$为坐标原点），则$\Delta ABF$面积的最小值是__________．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（本小题满分 10 分）

ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$2a+b=2c\cos B$．

（1）求角C；

（2）若CD是角C的平分线,$AD=2\sqrt{7},DB=\sqrt{7}$,求CD的长．

18．（本小题满分 12 分）

已知等差数列$\{a_n\}$的公差为$d>1$，前n项和为S_n，满足$S_3=9,a_1,a_2,a_5$成等比数列．

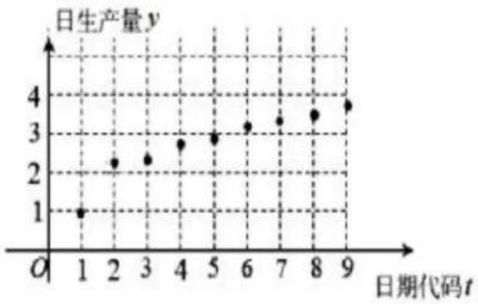
（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式;

（2）若$b_n=2^{n-1}$,判断a_n与$b_n(n\in N^*)$的大小,并说明理由．

19.（本小题满分 12 分）

2020 年新型冠状病毒肺炎疫情席卷全球，我国在全力保障口罩、防护服等医疗物资供给基础上，重点开展医疗救治急需的呼吸机、心电监护仪等医疗设备的组织生产和及时供应，统筹协调医用物资生产企业高速生产，支援世界各国抗击肺炎疫情．我市某医疗器械公司转型升级，从9月1日开始投入呼吸机生产，该公司9月1日~9月9日连续9天的呼吸机日生产量为y_i（单位：百台，$i=1,2,\cdots,9$），数据作了初步处理，得到如图所示的散点图．

$\overline{y}$	$\overline{z}$	$\overline{t}$	$\sum_{i=1}^{9} t_i^2$	$\sum_{i=1}^{9} t_i z_i$
2.73	19	5	285	1095



注：图中日期代码1~9分别对应9月1日~9月9日；

表中$z_i=e^{y_i}$，$\overline{z}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} z_i$．

（1）从9个样本点中任意选取2个，在2个样本点的日生产量都不高于300台的条件下，求2个样本点都高于200台的概率；

（2）由散点图分析，样本点都集中在曲线$y=\ln(bt+a)$的附近，求y关于t的方程$y=\ln(bt+a)$，并估计该公司从生产之日起，需要多少天呼吸机日生产量可超过500台．

参考公式：回归直线方程是$v=\hat{\beta}\mu+\hat{\alpha}$，

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\mu_i-\overline{\mu})(v_i-\overline{v})}{\sum_{i=1}^{n}(\mu_i-\overline{\mu})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\mu_i v_i-n\overline{\mu}\,\overline{v}}{\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2-n\overline{\mu}^2}，\hat{\alpha}=\overline{v}-\hat{\beta}\overline{\mu}．$$

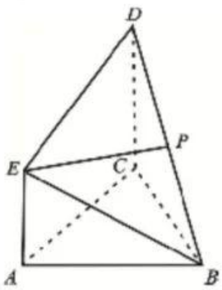
参考数据：$e^5\approx 148.4$．

20．（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $B-ACDE$ 中，平面 $ABC\perp$ 平面 $ACDE$，ΔABC 是等边三角形，在直角梯形 $ACDE$ 中，$AE//CD$，$AE\perp AC$，$AE=1,AC=CD=2,$ P 是棱 BD 的中点．

（1）求证：$EP\perp$ 平面 BCD；

（2）设点 M 在线段 AC 上，若平面 PEM 与平面 EAB 所成的锐二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，求 MP 的长．



21．（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=2a\ln x+\dfrac{1}{x^2}(a\in R)$．

（1）当 $a=1$ 时，求证：函数 $f(x)$ 没有零点；

（2）若存在两个不相等正实数 x_1、x_2，满足 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$，且 $x_1x_2=1$，求实数 a 的取值范围．

22．（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的两焦点与短轴的一个端点的连线构成等边三角形，直线 $x+y+2\sqrt{2}-1=0$ 与以椭圆 C 的右焦点为圆心，椭圆 C 的长半轴长为半径的圆相切．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）ΔBMN 是椭圆 C 的内接三角形，若坐标原点 O 为 ΔBMN 的重心，求点 B 到直线 MN 距离的取值范围．

梅州市高三总复习质检试卷（2021.5）

数学参考答案与评分意见

一、单选题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，满分 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	B	A	A	D	C	A

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分．

题号	9	10	11	12
答案	AC	ABC	ACD	CD

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分．

13. 540　　14. 6　　15. 502　　16. $\frac{7}{4}\sqrt{2}$

四、解答题：本大题共 6 小题，满分 70 分．解答须写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17.（本小题满分 10 分）

解法一：

（1）根据余弦定理得 $2a+b=2c\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，　……….1 分

整理得 $a^2+b^2-c^2=-ab$，　……….2 分

$\therefore \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\dfrac{1}{2}$，　……….3 分

$\because C\in(0,\pi)$，　……….4 分

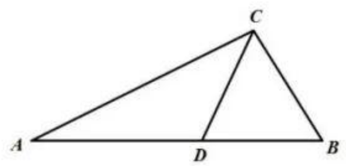
$\therefore C=\dfrac{2\pi}{3}$．　……….5 分

（2）$\because \dfrac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta BCD}}=\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AC}{BC}$，　……….6 分

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$ $\therefore b=2a$，　……….7 分

$\therefore (3\sqrt{7})^2=a^2+(2a)^2+2a^2$，

得 $a=3, b=6$．　……….8 分



由三角形面积关系得，$\frac{1}{2}ab\sin 120^\circ=\frac{1}{2}aCD\sin 60^\circ+\frac{1}{2}bCD\sin 60^\circ$，……… 9 分

得 $CD=\frac{ab}{a+b}=\frac{3\times 6}{3+6}=2$. ………. 10 分

解法二：

（1）根据正弦定理得 $2\sin A+\sin B=2\sin C\cos B$ ………. 1 分

$\because \sin A=\sin[\pi-(B+C)]=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，………. 2 分

$\therefore 2\sin B\cos C=-\sin B$， ………. 3 分

$\because \sin B\neq 0$，$\therefore \cos C=-\frac{1}{2}$， ………. 4 分

$\because C\in(0,\pi)$，$\therefore C=\frac{2\pi}{3}$. ………. 5 分

（2）在 $\Delta ACD,\Delta BCD$ 中，由正弦定理得，

$\frac{2\sqrt{7}}{\sin 60^\circ}=\frac{CD}{\sin A},\frac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ}=\frac{CD}{\sin B}$， ………. 6 分

得 $\sin B=2\sin A$，$\therefore b=2a$. ………. 7 分

$\therefore (3\sqrt{7})^2=a^2+(2a)^2+2a^2$，　得 $a=3,b=6$. ………. 8 分

$\therefore \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{3^2+(3\sqrt{7})^2-6^2}{2\times 3\times 3\sqrt{7}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$， ………. 9 分

$CD^2=a^2+BD^2-2aBD\cos B=9+7-2\times 3\times\sqrt{7}\times\frac{2}{\sqrt{7}}$，

$\therefore CD=2$. ………. 10 分

18．（本小题满分 10 分）

解：（1）由题意得 $\begin{cases}a_1+a_2+a_3=9,\\ {a_2}^2=a_1\cdot a_5;\end{cases}\therefore\begin{cases}a_1+d=3,\\ (a_1+d)^2=a_1(a_1+4d);\end{cases}$ ………. 2 分

解得，$a_1=1,d=2$. ………. 4 分

$\therefore a_n=2n-1$. ………. 5 分

（2）当 $n=1$ 时，$a_1=b_1$， ………. 6 分

当 $1<n\leq 3$ 时，$a_n>b_n$， ………. 7 分

经检验当 $n\leq 3$ 时，$a_n\geq b_n$.

当$n\ge 4$时，设$f(x)=2^{x-1}-(2x-1),x\ge 4$,　　……….8分

则$f'(x)=2^{x-1}\ln 2-2$.　　……….9分

当$x\ge 4$时，$f'(x)\ge 2^3\ln 2-2>0$, $\therefore$ $f(x)$在$[4,+\infty)$上单调递增，　　……….10分

$\therefore$ $x\ge 4$时，$f(x)>f(4)=1>0$, $\therefore$ $2^{x-1}-(2x-1)>0$,　　……….11分

$\therefore$ $n\ge 4$时，$b_n>a_n$.　　……….12分

综上知，当$n\le 3$时，$a_n\ge b_n$，$n\ge 4$时，$b_n>a_n$.

19.（本小题满分12分）

解：（1）9个样本点中日生产量都不高于300台的有5个，

高于200台且不高于300台有4个，　　……….1分

设事件A：所取2个样本点的日生产量都不高于300台，

事件B：所取2个样本点的日生产量高于200台，　　……….2分

$\therefore$ 事件AB：所取2个样本点的日生产量高于200台且不高于300台，……..3分

则$P(A)=\dfrac{C_5^2}{C_9^2}=\dfrac{5}{18}$，$P(AB)=\dfrac{C_4^2}{C_9^2}=\dfrac{1}{6}$，　　……….5分

$\therefore$ $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{3}{5}$.　　……….6分

（2）$\because$ $y=\ln(bt+a)$，$\therefore$ $z=e^y=bt+a$，　　……….8分

$\because$ $\bar{t}=5$，$\sum\limits_{i=1}^{9}t_i^2=285$，

$$\therefore\ b=\frac{\sum\limits_{i=1}^{9}(t_i-\bar{t})(z_i-\bar{z})}{\sum\limits_{i=1}^{9}(t_i-\bar{t})^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{9}(t_iz_i-\bar{t}\cdot z_i-\bar{z}\cdot t_i+\bar{t}\cdot\bar{z})}{\sum\limits_{i=1}^{9}(t_i^2-2\bar{t}\cdot t_i+\bar{t}^2)}$$

$$=\frac{\sum\limits_{i=1}^{9}t_iz_i-9\bar{t}\cdot\bar{z}}{\sum\limits_{i=1}^{9}t_i^2-9\bar{t}^2}=\frac{1095-9\times 5\times 19}{285-9\times 5^2}=4,$$　　……….9分

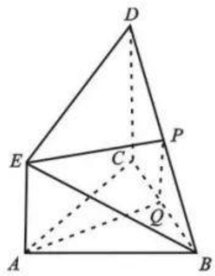
$\therefore$ $a=\bar{z}-b\bar{t}=19-4\times 5=-1$

$\therefore$ $y=\ln(4t-1)$，　　……….10分

令$\ln(4t-1)>5$，解得$t>\dfrac{e^5+1}{4}\approx 37.35$.　　……….11分

$\therefore$ $t\ge 38$，即该公司从生产之日起，需要38天呼吸机日生产量可超过500台.…12分

20.（本小题满分 12 分）



解法一：（1）证明：如图，取 BC 中点 Q，连接 AQ，PQ.

$\because$ P 为 BD 中点，$\therefore$ $PQ \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}CD$，$\because$ $AE \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}CD$，$\therefore$ $AE \underline{\underline{/\!/}} PQ$，

$\therefore$ 四边形 $AEPQ$ 是平行四边形，..........1 分

$\therefore$ $EP /\!/ AQ$. ....2 分

$\because$ 平面 $ABC \perp$ 平面 $ACDE$，平面 $ABC \cap$ 平面 $ACDE = AC$，$DC \perp AC$，

$\therefore$ $DC \perp$ 平面 ABC. ....3 分

$\because$ $AQ \subset$ 平面 ABC，$\therefore$ $DC \perp AQ$. ....4 分

$\because$ 等边 ΔABC 中，Q 为 BC 中点，$\therefore$ $AQ \perp BC$，$DC \cap BC = C$，

$\therefore$ $AQ \perp$ 平面 BCD，$\because$ $EP /\!/ AQ$，..........5 分

$\therefore$ $EP \perp$ 平面 BCD. ....6 分

（2）如图，设 O 是 AC 的中点，在等边 ΔABC 中，$BO \perp AC$，

作 $Oz /\!/ DC$，$\because$ $DC \perp$ 平面 ABC，$\therefore$ $Oz \perp$ 平面 ABC. ....7 分

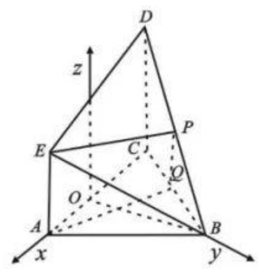
以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{Oz}$ 方向建立如图所示的空间直角坐标系，可得：

$$O(0,0,0)，A(1,0,0)，B\left(0,\sqrt{3},0\right)，E(1,0,1)，D(-1,0,2)，P\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$$

..........8 分

设平面 EAB 的法向量为 $\vec{m}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$，

由 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=-x_1+\sqrt{3}y_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}=z_1=0\end{cases} \Rightarrow \vec{m}=\left(\sqrt{3},1,0\right)$，..........9 分



$\because$ 点 M 在线段 AC 上，设其坐标为 $M\left(t,0,0\right)$，其中 $-1 \le t \le 1$，

$\therefore$ $\overrightarrow{EM}=\left(t-1,0,-1\right)$，$\overrightarrow{EP}=\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$.

设平面 PEM 的法向量为 $\vec{n}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EM}=\left(t-1\right)x_2-z_2=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EP}=-\frac{3}{2}x_2+\frac{\sqrt{3}}{2}y_2=0\end{cases} \Rightarrow \vec{n}=\left(1,\sqrt{3},t-1\right)$. ....10 分

由题意，设平面 PEM 与平面 EAB 所成的锐二面角为 θ，

$\cos\theta=\left|\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}\right|=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{1+3+(t-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}\Rightarrow t^2-2t=0$，

$\therefore t=0$ 或 $t=2$， ....11 分

$\because -1\le t\le 1$，$\therefore M(0,0,0)$，

$\therefore MP=\sqrt{2}$. ....12 分

解法二：

（1）$\because$ 平面 $ABC\perp$ 平面 $ACDE$，平面 $ABC\cap$ 平面 $ACDE=AC$，$DC\perp AC$，

$\therefore DC\perp$ 平面 ABC， 1分

$\because AE\,//\,CD$，$\therefore AE\perp$ 平面 ABC， ....2 分

作 $Ay\perp AB$，再以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{Ay}$，$\overrightarrow{AE}$ 为 x,y,z 轴方向建立如图所示的空间直角坐标系，

$A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(1,\sqrt{3},0)$，$E(0,0,1)$，$D(1,\sqrt{3},2)$，$P\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right)$，

..........3 分

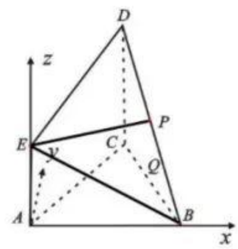
$\therefore \overrightarrow{EP}=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{CD}=(0,0,2)$， ....4 分

$\because \overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{CD}=0$， ....6 分

$\therefore EP\perp BC$，$EP\perp CD$，$BC\cap CD=C$， ....7 分

$\therefore EP\perp$ 平面 BCD. ....8 分

（2）由题意可知：平面 EAB 的法向量为 $\vec{m}=(0,1,0)$， ....9 分



因为点 M 在线段 AC 上，设其坐标为 $M(a,\sqrt{3}a,0)$，其中 $0<a<1$，

$\therefore \overrightarrow{EM}=(a,\sqrt{3}a,-1)$，$\overrightarrow{EP}=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，

设平面 PEM 的法向量为 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EM}=ax_1+\sqrt{3}ay_1-z_1=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EP}=\dfrac{3}{2}x_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y_1=0\end{cases}\Rightarrow \vec{n}=(1,-\sqrt{3},-2a)$， ....10 分

由题意，设平面 PEM 与平面 EAB 所成的锐二面角为 θ，

$\cos\theta=\left|\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3+4a^2}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}\Rightarrow 4a^2+4=5$，

$\therefore a=\dfrac{1}{2}$或$a=-\dfrac{1}{2}$， ....11 分

$\because 0<a<1$，$\therefore M\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$.

$\therefore MP=\sqrt{2}$. ....12 分

21.（本小题满分 12 分）

解：（1）当$a=1$时，$f(x)=2\ln x+\dfrac{1}{x^2}$，定义域为$(0,+\infty)$. ....1 分

则$f'(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{2(x^2-1)}{x^3}=0$，解得：$x=1$或$x=-1$（不合，舍去） ...2 分

当$x\in(0,1)$，$f'(x)<0$，函数$y=f(x)$在$(0,1)$单调递减，

当$x\in(1,+\infty)$，$f'(x)>0$，函数$y=f(x)$在$(1,+\infty)$单调递增. ....3 分

$\therefore x=1$时，$f(x)$取得最小值，$f(1)=1$，即$f(x)\geq 1$. ....4 分

$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$没有零点.

（2）解法一：$\because x_1x_2=1$，不妨设$x_1>1>x_2>0$，可得$\dfrac{x_1}{x_2}>1$， ....5 分

由$f(x_1)=f(x_2)$得：$2a\ln x_1+\dfrac{1}{x_1^2}=2a\ln x_2+\dfrac{1}{x_2^2}$， ....6 分

则$2a\ln\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{1}{x_2^2}-\dfrac{1}{x_1^2}$，$\therefore a>0$，

$\therefore 2a\ln\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2x_2^2}$，$\because x_1x_2=1$， ....7 分

$\therefore 2a\ln\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{x_1^2-x_2^2}{x_1x_2}=\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{x_2}{x_1}$， ....8 分

设$t=\dfrac{x_1}{x_2}>1$，则$2a\ln t=t-\dfrac{1}{t}$， ....9 分

令$g(t)=t-\dfrac{1}{t}-2a\ln t\,(t>1)$，$\because g(1)=0$，

由题意可知，函数 $y=g(t)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上有且只有一个零点.

$\because g'(t)=\dfrac{t^2-2at+1}{t^2}$， 设 $g'(t)=0$ 的两根为 t_1，t_2，

由 $t^2-2at+1=0$，得 $t_1t_2=1$， ……….10 分

$\therefore$ 函数 $y=g'(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有且只有一个实根， ……….11 分

$g'(1)=2-2a<0$，解得 $a>1$. ……….12 分

综上，实数 a 的取值范围为 $(1,+\infty)$.

解法二：(2) $\because x_1x_2=1$，不妨设 $x_1>1>x_2>0$，可得 $\dfrac{x_1}{x_2}>1$， ……….5 分

由 $f(x_1)=f(x_2)$ 得：$2a\ln x_1+\dfrac{1}{x_1^{\ 2}}=2a\ln x_2+\dfrac{1}{x_2^{\ 2}}$， ……….6 分

则 $2a\ln\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{1}{x_2^{\ 2}}-\dfrac{1}{x_1^{\ 2}}$，$\therefore a>0$， ……….7 分

$\because x_1x_2=1,\therefore x_1=\dfrac{1}{x_2}$，$\therefore 2a\ln x_1^{\ 2}=x_1^{\ 2}-\dfrac{1}{x_1^{\ 2}}$ ， ……….8 分

设 $t=x_1^2>1$，则 $2a\ln t=t-\dfrac{1}{t}$，下同解法一，略. ……….9 分

22.（本小题满分 12 分）

解：(1) 椭圆的右焦点为 $F_2(c,0)$，

以椭圆 C 右焦点为圆心，长半轴长为半径的圆方程为 $(x-c)^2+y^2=a^2$， …..1 分

$\therefore$ 圆心到直线 $x+y+2\sqrt{2}-1=0$ 的距离 $d=\dfrac{|c+2\sqrt{2}-1|}{\sqrt{2}}=a$ ①， ……….2 分

$\because$ 椭圆 C 两焦点与短轴的一个端点的连线构成等边三角形，

$\therefore\ a=2c,b=\sqrt{3}c$， ……….3 分

代入①得 $a=2,b=\sqrt{3},c=1$， ……….4 分

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2) 解法一：

设 $B(m,n)$，设 MN 中点为 D，直线 OD 与椭圆交于 A，B 两点，

$\because$ O为$\triangle BMN$的重心，则$BO=2OD=OA$，$\therefore$ $D(-\frac{m}{2},-\frac{n}{2})$.

点B到直线MN距离是原点O到直线MN距离的3倍，……….5分

当MN斜率不存在时，点D在x轴上，所以此时点B在长轴的端点处，

由$|OB|=2$，则$|OD|=1$，则O到直线MN的距离为1；

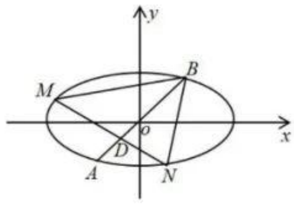
B到直线MN的距离为3；……….6分

当MN斜率存在时，设$M(x_1,y_1)$，$N(x_1,y_1)$，……….7分

$\therefore$ $x_1+x_2=-m$，$y_1+y_2=-n$，

$\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1\\ \frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1\end{cases}$ 两式相减得：$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{3}=0$，

$\therefore$ $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{3m}{4n}$，……….8分



$\therefore$ 直线MN方程为：$y+\frac{n}{2}=-\frac{3m}{4n}(x+\frac{m}{2})$，

化简得：$6mx+8ny+4n^2+3m^2=0$，

设O到直线MN的距离为d，则$d=\frac{4n^2+3m^2}{\sqrt{64n^2+36m^2}}$，……….9分

$\because$ $\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{3}=1$，$\therefore$ $3m^2=12-4n^2$，……….10分

$\therefore$ $d=\frac{12}{\sqrt{144+16n^2}}=\frac{3}{\sqrt{9+n^2}}$.……….11分

$\because 0<n^2\le 3, \therefore 3<\sqrt{9+n^2}\le 2\sqrt{3}, \therefore \frac{\sqrt{3}}{2}\le\frac{1}{\sqrt{9+n^2}}<1$，

$\therefore$ $\frac{3\sqrt{3}}{2}\le 3d<3$，

综上，点B到直线MN距离的取值范围为$\left[\frac{3\sqrt{3}}{2},3\right]$.……….12分

解法二：

设MN中点为D，直线OD与椭圆交于A，B两点，

O为$\triangle BMN$的重心，则$BO=2OD=OA$，

点B到直线MN距离是原点O到直线MN距离的3倍，……….5分

当 MN 斜率不存在时，点 D 在 x 轴上，所以此时点 B 在长轴的端点处

由 $|OB|=2$，则 $|OD|=1$，则 O 到直线 MN 的距离为1；

B 到直线 MN 的距离为3； ....6 分

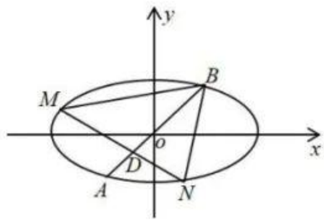
当 MN 斜率存在时，设 MN：$y=kx+m$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，.........7 分

则 $D\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$，所以 $A(x_1+x_2,y_1+y_2)$，

所以 $\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3}=\dfrac{x_2^2}{4}+\dfrac{y_2^2}{3}=\dfrac{(x_1+x_2)^2}{4}+\dfrac{(y_1+y_2)^2}{3}=1$，

即 $3x_1x_2+4y_1y_2=-6$， ....8 分

也即 $3x_1x_2+4(kx_1+m)(kx_2+m)=-6$，



$(4k^2+3)x_1x_2+4mk(x_1+x_2)+4m^2+6=0$，

$\begin{cases} y=kx+m \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases}$，则 $(4k^2+3)x^2+8mkx+4m^2-12=0$

$\Delta=48(4k^2+3-m^2)>0$，$x=\dfrac{-4mk\pm 2\sqrt{3(4k^2+3-m^2)}}{4k^2+3}$，

则：$x_1+x_2=\dfrac{-8mk}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{4k^2+3}$， ....9 分

代入得：$8m^2-6-\dfrac{32m^2k^2}{4k^2+3}=0$，$4m^2=4k^2+3$. ....10 分

设 O 到直线 MN 的距离为 d，则 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{\dfrac{4k^2+3}{4k^2+4}}=\sqrt{1-\dfrac{1}{4k^2+4}}$，..11 分

$\because 4k^2+4\ge 4$，$\therefore 0<\dfrac{1}{4k^2+4}\le\dfrac{1}{4}$，

$\therefore \dfrac{\sqrt{3}}{2}\le\sqrt{1-\dfrac{1}{4k^2+4}}<1$，$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\le 3d<3$.

综上，点 B 到直线 MN 距离的取值范围为 $\left[\dfrac{3\sqrt{3}}{2},3\right]$. ....12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》