

海淀区高三年级第二学期期末练习

数 学 (理科)

2019.5

本试卷共4页, 150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上, 在试卷上作答无效。考试结束后, 将本试卷和答题纸一并交回。

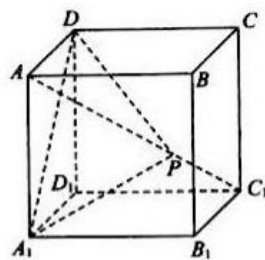
第一部分 (选择题 共40分)

一、选择题共8小题, 每小题5分, 共40分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

- (1) 已知集合 $A = \{x | 1 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x | 3 \leq x \leq 6\}$, 则 $A \cap B =$
 (A) $[1, 3]$ (B) $[3, 5]$ (C) $[5, 6]$ (D) $[1, 6]$
- (2) 复数 $z = a + i$ ($a \in \mathbf{R}$) 的实部是虚部的2倍, 则 a 的值为
 (A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) -2 (D) 2
- (3) 若直线 $l: \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + at \end{cases}$ (t 为参数) 经过坐标原点, 则直线 l 的斜率是
 (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2
- (4) 在 $(x-2)^5$ 的展开式中, x^2 的系数是
 (A) -80 (B) -10 (C) 5 (D) 40
- (5) 把函数 $y = 2^x$ 的图象向右平移 t 个单位长度, 所得图象对应的函数解析式为 $y = \frac{2^x}{3}$, 则 t 的值为
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\log_2 3$ (C) $\log_3 2$ (D) $\sqrt{3}$
- (6) 学号分别为 1, 2, 3, 4 的 4 位同学排成一排, 若学号相邻的同学不相邻, 则不同的排法种数为
 (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8
- (7) 已知函数 $f(x) = \sin \omega x$ ($\omega > 0$), 则“函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{4}, 1)$ ”是“函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ”的
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(8) 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 是对角线 AC_1 上的动点 (点 P 与 A, C_1 不重合). 则下面结论中错误的是

- (A) 存在点 P , 使得平面 $A_1DP \parallel$ 平面 B_1CD_1
- (B) 存在点 P , 使得 $AC_1 \perp$ 平面 A_1DP
- (C) S_1, S_2 分别是 $\triangle A_1DP$ 在平面 $A_1B_1C_1D_1$, 平面 BB_1C_1C 上的正投影图形的面积, 对任意点 P , 都有 $S_1 \neq S_2$
- (D) 对任意点 P , $\triangle A_1DP$ 的面积都不等于 $\frac{\sqrt{2}}{6}$



第二部分 (非选择题 共110分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

- (9) 已知直线 $l_1: x-y+1=0$ 与 $l_2: x+ay+3=0$ 平行, 则 $a=$ _____, l_1 与 l_2 之间的距离为 _____.
- (10) 已知函数 $f(x) = (x+t)(x-t^2)$ 是偶函数, 则 $t=$ _____.
- (11) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - 8n, n=1, 2, 3, \dots$, 则满足 $a_n > 0$ 的 n 的最小值为 _____.
- (12) 已知圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = 4$ 与曲线 $y = |x-1|$ 相交于 M, N 两点, 则线段 MN 的长度为 _____.
- (13) 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=2, BC=1$, 点 E 为 BC 的中点, 点 F 在线段 DC 上. 若 $\overline{AE} + \overline{AF} = \overline{AP}$, 且点 P 在直线 AC 上, 则 $\overline{AE} \cdot \overline{AF} =$ _____.
- (14) 已知集合 $A_0 = \{x \mid 0 < x < 1\}$. 给定一个函数 $y=f(x)$, 定义集合 $A_n = \{y \mid y=f(x), x \in A_{n-1}\}$, 若 $A_n \cap A_{n-1} = \emptyset$ 对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立, 则称该函数 $y=f(x)$ 具有性质“ \mathcal{G} ”.
 - (I) 具有性质“ \mathcal{G} ”的一个一次函数的解析式可以是 _____;
 - (II) 给出下列函数: ① $y = \frac{1}{x}$; ② $y = x^2 + 1$; ③ $y = \cos(\frac{\pi}{2}x) + 2$, 其中具有性质“ \mathcal{G} ”的函数的序号是 _____.(写出所有正确答案的序号)

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(15) (本小题满分 13 分)

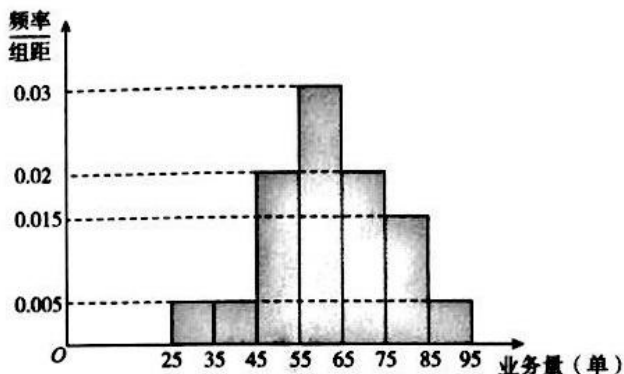
在 $\triangle ABC$ 中， $a=7$ ， $b=8$ ， $A=\frac{\pi}{3}$ 。

(I) 求 $\sin B$ 的值；

(II) 若 $\triangle ABC$ 是钝角三角形，求 BC 边上的高。

(16) (本小题满分 13 分)

某快餐连锁店招聘外卖骑手。该快餐连锁店提供了两种日工资方案：方案 (1) 规定每日底薪 50 元，快递业务每完成一单提成 3 元；方案 (2) 规定每日底薪 100 元，快递业务的前 44 单没有提成，从第 45 单开始，每完成一单提成 5 元。该快餐连锁店记录了每天骑手的人均业务量。现随机抽取 100 天的数据，将样本数据分为 $[25, 35)$ ，



$[35, 45)$ ， $[45, 55)$ ， $[55, 65)$ ， $[65, 75)$ ， $[75, 85)$ ， $[85, 95]$ 七组，整理得到如图所示的频率分布直方图。

(I) 随机选取一天，估计这一天该连锁店的骑手的人均日快递业务量不少于 65 单的概率；

(II) 从以往统计数据看，新聘骑手选择日工资方案 (1) 的概率为 $\frac{1}{3}$ ，选择方案 (2) 的概率为 $\frac{2}{3}$ 。若甲、乙、丙三名骑手分别到该快餐连锁店应聘，三人选择日工资方案相互独立，求至少有两名骑手选择方案 (1) 的概率；

(III) 若仅从人均日收入的角度考虑，请你利用所学的统计学知识为新聘骑手做出日工资方案的选择，并说明理由。(同组中的每个数据用该组区间的中点值代替)

(17) (本小题满分 14 分)

如图 1 所示, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $BC \parallel AD$, $CE \perp AD$, 垂足为 E , $AD=3BC=3$, $EC=1$. 将 $\triangle DEC$ 沿 EC 折起到 $\triangle D_1EC$ 的位置, 使平面 $D_1EC \perp$ 平面 $ABCE$, 如图 2 所示, 点 G 为棱 AD_1 上一个动点.

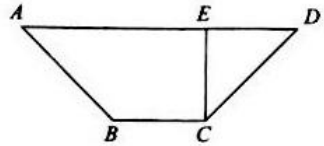


图 1

- (I) 当点 G 为棱 AD_1 中点时, 求证: $BG \parallel$ 平面 D_1CE ;
- (II) 求证: $AB \perp$ 平面 D_1BE ;
- (III) 是否存在点 G , 使得二面角 $G-BE-D_1$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$?
若存在, 求出 AG 的长; 若不存在, 请说明理由.

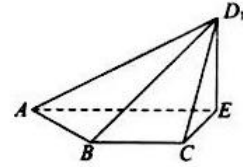


图 2

(18) (本小题满分 13 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左顶点 A 与上顶点 B 的距离为 $\sqrt{6}$.

- (I) 求椭圆 C 的方程和焦点的坐标;
- (II) 点 P 在椭圆 C 上, 线段 AP 的垂直平分线与 y 轴相交于点 Q , 若 $\triangle PAQ$ 为等边三角形, 求点 P 的横坐标.

(19) (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = e^{ax} (x^2 - \frac{a+2}{a})$, 其中 $a \neq 0$.

- (I) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处切线的倾斜角;
- (II) 若函数 $f(x)$ 的极小值小于 0, 求实数 a 的取值范围.

(20) (本小题满分 13 分)

对于给定的奇数 $m (m \geq 3)$, 设 A 是由 $m \times m$ 个数组成的 m 行 m 列的数表, 数表中第 i 行, 第 j 列的数 $a_{ij} \in \{0, 1\}$, 记 $c(i)$ 为 A 的第 i 行所有数之和, $r(j)$ 为 A 的第 j 列所有数之和, 其中 $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

对于 $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, 若 $|ma_j - c(i)| < \frac{m}{2}$ 且 $|ma_i - r(j)| < \frac{m}{2}$ 同时成立, 则称数对 (i, j) 为数表 A 的一个“好位置”.

- (I) 直接写出右面所给的 3×3 数表 A 的所有的“好位置”;
- (II) 当 $m=5$ 时, 若对任意的 $1 \leq i \leq 5$ 都有 $c(i) \geq 3$ 成立, 求数表 A 中的“好位置”个数的最小值;
- (III) 求证: 数表 A 中的“好位置”个数的最小值为 $2m-2$.

1	1	1
0	0	1
0	1	0

海淀区高三年级第二学期期末练习参考答案

数 学 (理科)

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

2019.05

1. B 2. D 3. D 4. A 5. B 6. A 7. A 8. C

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. $-1, \sqrt{2}$

10. 0,1

11. 5

12. $2\sqrt{2}$

13. $\frac{5}{2}$

14. $y = x + 1$ (答案不唯一), ① ②

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 北京高考在线网

(15) (共 13 分)

解：(I) 在 $\triangle ABC$ 中，因为 $a=7$, $b=8$, $A=\frac{\pi}{3}$,

所以由正弦定理 $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$

得 $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{8}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$.

(II) 方法 1:

由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

得 $49 = 64 + c^2 - 2 \times 8 \times c \times \frac{1}{2}$

即 $c^2 - 8c + 15 = 0$, 解得 $c=5$ 或 $c=3$

因为 $b > a, b > c$, 所以 $\angle B$ 为 $\triangle ABC$ 中最大的角,

当 $c=5$ 时, $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} > 0$, 与 $\triangle ABC$ 为钝角三角形矛盾, 舍掉

当 $c=3$ 时, $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} < 0$, $\triangle ABC$ 为钝角三角形,

所以 $c=3$

设 BC 边上的高为 h , 所以 $h = c \sin B = \frac{12\sqrt{3}}{7}$

方法 2:

因为 $b > a$, 所以 $B > A = \frac{\pi}{3}$, 所以 $C < \frac{\pi}{3}$,

所以 $\angle B$ 为 $\triangle ABC$ 中最大的角

因为 $\triangle ABC$ 为钝角三角形, 所以 B 为钝角

因为 $\sin B = \frac{4\sqrt{3}}{7}$, 所以 $\cos B = -\frac{1}{7}$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \sin C &= \sin(A+B) \\ &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{14} \end{aligned}$$

设 BC 边上的高为 h , 所以 $h = b \sin C = \frac{12\sqrt{3}}{7}$

16. (共 13 分) 搜索北京高考在线网, 获取更多试题及答案

解: (I) 设事件 A 为“随机选取一天, 这一天该连锁店的骑手的人均日快递业务量不少于 65 单”

依题意, 连锁店的人均日快递业务量不少于 65 单的频率分别为: 0.2, 0.15, 0.05

因为 $0.2 + 0.15 + 0.05 = 0.4$

所以 $P(A)$ 估计为 0.4.

(II) 设事件 B 为“甲、乙、丙三名骑手中至少有两名骑手选择方案 (1)”

设事件 C_i 为“甲乙丙三名骑手中恰有 $i(i=0,1,2,3)$ 人选择方案 (1)”,

则 $P(B) = P(C_2) + P(C_3)$

$$= C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + C_3^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{6}{27} + \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$$

所以三名骑手中至少有两名骑手选择方案 (1) 的概率为 $\frac{7}{27}$

(III) 方法 1:

设骑手每日完成快递业务量为 X 件

方案 (1) 的日工资 $Y_1 = 50 + 3X (X \in \mathbf{N}^*)$,

方案 (2) 的日工资 $Y_2 = \begin{cases} 100, & X \leq 44, X \in \mathbf{N}^* \\ 100 + 5(X - 44), & X > 44, X \in \mathbf{N}^* \end{cases}$

所以随机变量 Y_1 的分布列为

Y_1	140	170	200	230	260	290	320
P	0.05	0.05	0.2	0.3	0.2	0.15	0.05

所以 $EY_1 = 140 \times 0.05 + 170 \times 0.05 + 200 \times 0.2 + 230 \times 0.3$

$$+260 \times 0.2 + 290 \times 0.15 + 320 \times 0.05 = 236$$

同理随机变量 Y_2 的分布列为

Y_1	100	130	180	230	280	330
P	0.1	0.2	0.3	0.2	0.15	0.05

$$\begin{aligned} EY_2 &= 100 \times 0.1 + 130 \times 0.2 + 180 \times 0.3 + 230 \times 0.2 + 280 \times 0.15 + 330 \times 0.05 \\ &= 194.5 \end{aligned}$$

因为 $EY_1 > EY_2$ ，所以建议骑手应选择方案（1）

方法 2:

快餐店人均日快递量的期望是：

$$30 \times 0.05 + 40 \times 0.05 + 50 \times 0.2 + 60 \times 0.3 + 70 \times 0.2 + 80 \times 0.15 + 90 \times 0.05 = 62$$

因此，方案（1）日工资约为 $50 + 62 \times 3 = 236$

方案 2 日工资约为 $100 + (62 - 44) \times 5 = 190 < 236$

故骑手应选择方案（1）

17.（共 14 分）关注北京高考资讯公众号，获取更多试卷及答案

解：（I）方法 1:

在图 1 的等腰梯形 $ABCD$ 内，过 B 作 AE 的垂线，垂足为 F ，

因为 $CE \perp AD$ ，所以 $BF \parallel EC$

又因为 $BC \parallel AD$ ， $BC = CE = 1$ ， $AD = 3$

所以四边形 $BCEF$ 为正方形， $AF = FE = ED = 1$ ， F 为 AE 中点

在图 2 中，连结 GF

因为点 G 是 AD_1 的中点，

所以 $GF \parallel D_1E$

又因为 $BF \parallel EC$ ， $GF \cap BF = F$ ， $GF, BF \subset$ 平面 BFG ， $D_1E, EC \subset$ 平面 D_1EC ，

所以平面 $BFG \parallel$ 平面 CED_1

又因为 $BG \subset$ 面 GFB ，所以 $BG \parallel$ 平面 D_1EC

方法 2:

在图 1 的等腰梯形 $ABCD$ 内，过 B 作 AE 的垂线，垂足为 F

因为 $CE \perp AD$ ，所以 $BF \parallel EC$

又因为 $BC \parallel AD$ ， $BC = CE = 1$ ， $AD = 3$

所以四边形 $BCEF$ 为正方形， F 为 AE 中点

在图 2 中，连结 GF

因为点 G 是 AD_1 的中点，

所以 $GF \parallel D_1E$

又 $D_1E \subset$ 平面 D_1EC ， $GF \not\subset$ 平面 D_1EC

所以 $GF \parallel$ 平面 D_1EC

又因为 $BF \parallel EC$ ， $EC \subset$ 平面 D_1EC ， $BF \not\subset$ 平面 D_1EC

所以 $BF \parallel$ 平面 D_1EC

又因为 $GF \cap BF = F$

所以平面 $BFG \parallel$ 平面 D_1EC

又因为 $BG \subset$ 面 GFB ，所以 $BG \parallel$ 平面 D_1EC

方法 3:

在图 1 的等腰梯形 $ABCD$ 内，过 B 作 AE 的垂线，垂足为 F ，

因为 $CE \perp AD$ ，所以 $BF \parallel EC$

又因为 $BC \parallel AD$ ， $BC = CE = 1$ ， $AD = 3$

所以四边形 $BCEF$ 为正方形， $AF = FE = ED = 1$ ，得 $AE = 2$

所以 $BC \parallel AE$ ， $BC = \frac{1}{2}AE$

在图 2 中设点 M 为线段 D_1E 的中点，连结 MG, MC ，

因为点 G 是 AD_1 的中点，

所以 $GM \parallel AE$ ， $GM = \frac{1}{2}AE$

所以 $GM \parallel BC$ ， $GM = BC$ ，所以四边形 $MGBC$ 为平行四边形

所以 $BG \parallel CM$

又因为 $CM \subset$ 平面 D_1EC ， $BG \not\subset$ 平面 D_1EC

所以 $BG \parallel$ 平面 D_1EC

(II) 因为平面 $D_1EC \perp$ 平面 $ABCE$ ，

$$\text{平面 } D_1EC \cap \text{平面 } ABCE = EC,$$

$$D_1E \perp EC, D_1E \subset \text{平面 } D_1EC,$$

所以 $D_1E \perp$ 平面 $ABCE$

又因为 $AB \subset$ 平面 $ABCE$

所以 $D_1E \perp AB$

又 $AB = \sqrt{2}, BE = \sqrt{2}, AE = 2$, 满足 $AE^2 = AB^2 + BE^2$,

所以 $BE \perp AB$

又 $BE \cap D_1E = E$

所以 $AB \perp$ 平面 D_1EB

(III) 因为 EA, EC, ED_1 三线两两垂直, 如图, 建立空间直角坐标系 $E-ACD_1$,

所以 $A(2,0,0), D_1(0,0,1), B(1,1,0), \overrightarrow{AD_1} = (-2,0,1), \overrightarrow{EB} = (1,1,0)$.

假设存在点 G 满足题意,

设 $\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AD_1}, 0 \leq \lambda \leq 1$, 则 $\overrightarrow{AG} = \lambda(-2,0,1)$,

所以 $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AG} = (2,0,0) + \lambda(-2,0,1) = (2-2\lambda, 0, \lambda)$

设平面 GBE 的法向量为 $\mathbf{m} = (a, b, c)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \overrightarrow{EB} \cdot \mathbf{m} = 0 \\ \overrightarrow{EG} \cdot \mathbf{m} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} a + b = 0 \\ (2-2\lambda)a + \lambda c = 0 \end{cases}$$

取 $a = \lambda$, 则 $\mathbf{m} = (\lambda, -\lambda, 2\lambda - 2)$,

由 (II), $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$ 为平面 BED_1 的法向量,

$$\text{令 } |\cos \langle \overrightarrow{AB}, \mathbf{m} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{m}|}{|\overrightarrow{AB}| |\mathbf{m}|} = \frac{|-2\lambda|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2\lambda^2 + (2\lambda - 2)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

解得 $\lambda = \frac{2}{3}$ 或 $\lambda = 2$ (舍)

所以存在点 G , 使得二面角 $G-BE-D_1$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 且 $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AD_1}$,

得 $AG = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

18. (共 13 分)

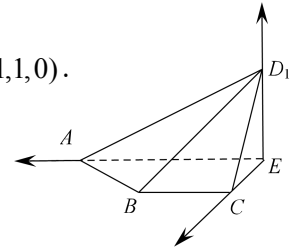
解: (I) 依题意, 有 $\sqrt{4+b^2} = \sqrt{6}$

所以 $b^2 = 2$

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

所以 $c = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$,

焦点坐标分别为 $F_1(-\sqrt{2}, 0), F_2(\sqrt{2}, 0)$,



(II) 方法 1:

设 $P(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{2} = 1$, 且 $A(-2, 0)$,

若点 P 为右顶点, 则点 Q 为上 (或下) 顶点, $|AP| = 4, |AQ| = \sqrt{6}$, $\triangle PAQ$ 不是等边三角形, 不合题意, 所以 $x_0 \neq \pm 2, y_0 \neq 0$.

设线段 PA 中点为 M , 所以 $M(\frac{x_0 - 2}{2}, \frac{y_0}{2})$

因为 $PA \perp MQ$, 所以 $k_{PA} \cdot k_{MQ} = -1$

因为直线 PA 的斜率 $k_{AP} = \frac{y_0}{x_0 + 2}$

所以直线 MQ 的斜率 $k_{MQ} = -\frac{x_0 + 2}{y_0}$

又直线 MQ 的方程为 $y - \frac{y_0}{2} = -\frac{x_0 + 2}{y_0}(x - \frac{x_0 - 2}{2})$

令 $x = 0$, 得到 $y_Q = \frac{y_0}{2} + \frac{(x_0 + 2)(x_0 - 2)}{2y_0}$

因为 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{2} = 1$

所以 $y_Q = -\frac{y_0}{2}$

因为 $\triangle PAQ$ 为正三角形,

所以 $|AP| = |AQ|$, 即 $\sqrt{(x_0 + 2)^2 + y_0^2} = \sqrt{2^2 + \frac{y_0^2}{4}}$

化简, 得到 $5x_0^2 + 32x_0 + 12 = 0$, 解得 $x_0 = -\frac{2}{5}, x_0 = -6$ (舍)

即点 P 的横坐标为 $-\frac{2}{5}$.

方法 2:

设 $P(x_0, y_0)$, 直线 AP 的方程为 $y = k(x + 2)$.

当 $k = 0$ 时, 点 P 为右顶点, 则点 Q 为上 (或下) 顶点, $|AP| = 4, |AQ| = \sqrt{6}$, $\triangle PAQ$

不是等边三角形, 不合题意, 所以 $k \neq 0$.

$$\text{联立方程} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = k(x+2) \end{cases}$$

消元得 $(1+2k^2)x^2 + 8k^2x + 8k^2 - 4 = 0$

所以 $\Delta = 16 > 0$

所以 $x_0 + (-2) = \frac{-8k^2}{1+2k^2}$

设线段 PA 中点为 M ，所以 $x_M = \frac{x_0 - 2}{2} = \frac{-4k^2}{1+2k^2}$ ， $y_M = k(\frac{-4k^2}{1+2k^2} + 2) = \frac{2k}{1+2k^2}$

所以 $M(\frac{-4k^2}{1+2k^2}, \frac{2k}{1+2k^2})$

因为 $AP \perp MQ$ ，所以 $K_{MQ} = -\frac{1}{k}$

所以直线 MQ 的方程为 $y - \frac{2k}{1+2k^2} = -\frac{1}{k}(x - \frac{-4k^2}{1+2k^2})$

令 $x = 0$ ，得到 $y_Q = \frac{2k}{1+2k^2} - \frac{1}{k} \cdot \frac{4k^2}{1+2k^2} = \frac{-2k}{1+2k^2}$

因为 $\triangle PAQ$ 为正三角形，所以 $|AP| = |AQ|$

所以 $\sqrt{1+k^2} \cdot \frac{4}{1+2k^2} = \sqrt{4 + (\frac{-2k}{1+2k^2})^2}$

化简，得到 $4k^4 + k^2 - 3 = 0$ ，解得 $k^2 = \frac{3}{4}, k^2 = -1$ (舍)

所以 $x_0 = \frac{-4k^2 + 2}{1+2k^2} = -\frac{2}{5}$ ，

即点 P 的横坐标为 $-\frac{2}{5}$ 。

方法 3:

设 $P(x_0, y_0)$ ，

当直线 AP 的斜率为 0 时，点 P 为右顶点，则点 Q 为上（或下）顶点，

$|AP| = 4, |AQ| = \sqrt{6}$ ， $\triangle PAQ$ 不是等边三角形，不合题意，所以直线 AP 的斜率不为 0。

设直线 AP 的方程为 $x = ty - 2$

$$\text{联立方程} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ x = ty - 2 \end{cases}$$

消元得, $(t^2 + 2)y^2 - 4ty = 0$

所以 $y_0 = \frac{4t}{t^2 + 2}$

设线段 PA 中点为 M

所以 $y_M = \frac{2t}{t^2 + 2}, x_M = \frac{-4}{t^2 + 2},$

所以 $M(\frac{-4}{t^2 + 2}, \frac{2t}{t^2 + 2})$

因为 $AP \perp MQ$, 所以 $k_{MQ} = -\frac{1}{k}$

所以直线 MQ 的方程为 $y - \frac{2t}{t^2 + 2} = -t(x - \frac{-4}{t^2 + 2})$

令 $x = 0$, 得到 $y_Q = \frac{-2t}{t^2 + 2}$

因为 $\triangle PAQ$ 为正三角形, 所以 $|AP| = |AQ|$

所以 $\sqrt{1+t^2} \cdot \frac{|4t|}{t^2+2} = \sqrt{4+(\frac{2t}{t^2+2})^2}$

化简, 得到 $3t^4 - t^2 - 4 = 0$, 解得 $t^2 = \frac{4}{3}, t^2 = -1$ (舍)

所以 $x_0 = \frac{2t^2 - 4}{t^2 + 2} = -\frac{2}{5},$

即点 P 的横坐标为 $-\frac{2}{5}$

19. (共 14 分) 关注北京高考资讯公众号, 获取更多试卷及答案

解: (I) 因为 $f(x) = e^{ax}(x^2 - \frac{a+2}{a})$, 所以 $f'(x) = e^{ax}(ax^2 + 2x - (a+2))$

所以 $f'(1) = 0$

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处切线的倾斜角为 0

(II) 方法 1:

因为 $f'(x) = e^{ax}(ax^2 + 2x - (a+2)) = e^{ax}(ax + (a+2))(x-1)$

令 $f'(x) = 0$, 得到 $x_1 = -\frac{a+2}{a}, x_2 = 1$

当 $a > 0$ 时, $x, f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	$(x_1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
-----	------------------	-------	------------	---	----------------

$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

而 $f(1) = e^a(1 - \frac{a+2}{a}) = e^a(1 - 1 - \frac{2}{a}) = e^a(-\frac{2}{a}) < 0$ ，符合题意

当 $a = -1$ 时， $x_1 = -\frac{a+2}{a} = x_2 = 1$ ，

$f'(x) = -e^{ax}(x+1)^2 \leq 0$ ， $f(x)$ 没有极值，不符合题意

当 $-1 < a < 0$ 时， $x_1 > 1$ ， $f'(x)$ ， $f(x)$ 的变化情况如下表

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, x_1)$	x_1	$(x_1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

而 $f(1) = e^a(-\frac{2}{a}) > 0$ ，不符合题意

当 $a < -1$ 时， $x_1 < 1$ ， $f'(x)$ ， $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	$(x_1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

所以

$$f(x_1) = e^{a(-\frac{a+2}{a})} [(-\frac{a+2}{a})^2 - (\frac{a+2}{a})] < 0, \quad \text{解得 } a < -2$$

综上， a 的取值范围是 $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

方法 2:

因为函数 $f(x)$ 的极小值小于 0，

所以 $f(x) < 0$ 有解，即 $x^2 - \frac{a+2}{a} < 0$ 有解

所以 $\frac{a+2}{a} > 0$ ，所以有 $a > 0$ 或 $a < -2$

因为 $f'(x) = e^{ax}(ax^2 + 2x - (a+2)) = e^{ax}(ax + (a+2))(x-1)$

令 $f'(x) = 0$ ，得到 $x_1 = -\frac{a+2}{a}$, $x_2 = 1$

当 $a > 0$ 时， x ， $f'(x)$ ， $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	$(x_1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

而 $f(1) = e^a(1 - \frac{a+2}{a}) = e^a(1 - 1 - \frac{2}{a}) = e^a(-\frac{2}{a}) < 0$ ，符合题意

当 $a < -2$ 时， $x_1 < 1$ ， $f'(x)$ ， $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	$(x_1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

而 $f(x_1) = e^{a(-\frac{a+2}{a})} [(-\frac{a+2}{a})^2 - (\frac{a+2}{a})] = e^{a(-\frac{a+2}{a})} \frac{2(a+2)}{a^2} < 0$ ，符合题意

综上， a 的取值范围是 $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

20. (共 13 分) 关注北京高考资讯公众号，获取更多试卷及答案

解：(I) “好位置”有：(1,2), (1,3), (2,1), (3,1)

(II) 因为对于任意的 $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ， $c(i) \geq 3$ ；

所以当 $a_{i,j} = 1$ 时， $|5 - c(i)| \leq 5 - 3 < \frac{5}{2}$ ，

当 $a_{i,j} = 0$ 时， $|5a_{i,j} - c(i)| = c(i) > \frac{5}{2}$ ；

因此若 (i, j) 为“好位置”，

则必有 $a_{i,j} = 1$ ，且 $5 - r(j) < \frac{5}{2}$ ，即 $r(j) \geq 3$

设数表中共有 $n(n \geq 15)$ 个 1，其中有 t 列中含 1 的个数不少于 3，

则有 $5 - t$ 列中含 1 的个数不多于 2，

所以 $5t + 2(5 - t) \geq n \geq 15$ ， $t \geq \frac{5}{3}$ ，

因为 t 为自然数，所以 t 的最小值为 2

因此该数表中值为 1，且相应位置不为“好位置”的数个数最多不超过 $3 \times 2 = 6$

所以，该数表好位置的个数不少于 $15 - 6 = 9$ 个

而下面的 5×5 数表显然符合题意

1	1	1	0	0
1	1	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	0	0	1
1	0	0	1	1

此数表的“好位置”的个数恰好为 9

综上所述，该数表的“好位置”的个数的最小值为 9

(III) 当 (i, j) 为“好位置”时，且 $a_{i,j} = 1$ 时，

则有 $|m - c(i)| < \frac{m}{2}$ ，所以 $c(i) > \frac{m}{2}$ ，

注意到 m 为奇数， $c(i) \in \mathbf{N}^*$ ，所以有 $c(i) \geq \frac{m+1}{2}$

同理得到 $r(j) \geq \frac{m+1}{2}$

当 (i, j) 为“好位置”，且 $a_{i,j} = 0$ 时，

则 $|m - c(i)| < \frac{m}{2}$ ，则必有 $c(i) < \frac{m}{2}$ ，

注意到 m 为奇数， $c(i) \in \mathbf{N}^*$ ，所以有 $c(i) \leq \frac{m-1}{2}$

同理得到 $r(j) \leq \frac{m-1}{2}$

因为交换数表的各行，各列，不影响数表中“好位置”的个数，

所以不妨设 $c(i) \geq \frac{m+1}{2}, 0 \leq i \leq p, c(i) < \frac{m+1}{2}, p+1 \leq i \leq m$

$$r(j) \geq \frac{m+1}{2}, 0 \leq j \leq q, r(j) < \frac{m+1}{2}, q+1 \leq j \leq m$$

其中 $0 \leq p, q \leq m, p, q \in \mathbf{N}$

则数表 A 可以分成如下四个子表

A_1	A_3
A_2	A_4

其中 A_1 是 p 行 q 列, A_3 是 p 行 $m-q$ 列, A_2 是 $m-p$ 行 q 列, A_4 是 $m-p$ 行 $m-q$ 列

设 A_1, A_2, A_3, A_4 中 1 的个数分别为 x_1, x_2, x_3, x_4

则 A_1, A_2, A_3, A_4 中 0 的个数分别为 $pq - x_1, q(m-p) - x_2,$

$$p(m-q) - x_3, (m-p)(m-q) - x_4$$

则数表 A 中好位置的个数为 $x_1 + (m-p)(m-q) - x_4$ 个

$$\text{而 } x_1 + x_3 \geq p \times \frac{m+1}{2}, \quad x_3 + x_4 \leq (m-q) \times \frac{m-1}{2}$$

$$\text{所以 } x_1 - x_4 \geq p \times \frac{m+1}{2} - (m-q) \times \frac{m-1}{2}$$

$$\text{所以 } x_1 + (m-p)(m-q) - x_4 \geq x_1 - x_4 \geq (m-p)(m-q) + p \times \frac{m+1}{2} - (m-q) \times \frac{m-1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } & (m-p)(m-q) + p \times \frac{m+1}{2} - (m-q) \times \frac{m-1}{2} \\ &= m^2 - pm - qm + pq + p \times \frac{m+1}{2} - (m-q) \times \frac{m-1}{2} \\ &= p \times \frac{m-1}{2} - q \times \frac{m+1}{2} + pq + \frac{m^2+m}{2} \\ &= (p - \frac{m+1}{2})(q - \frac{m-1}{2}) - \frac{m^2-1}{4} + \frac{m^2+m}{2} \\ &= (p - \frac{m+1}{2})(q - \frac{m-1}{2}) + \frac{m^2+2m+1}{4} \end{aligned}$$

显然当 $(p - \frac{m+1}{2})(q - \frac{m-1}{2})$ 取得最小值时, 上式取得最小值,

因为 $0 \leq p, q \leq m$, 所以

$$(p - \frac{m+1}{2})(q - \frac{m-1}{2}) + \frac{m^2+2m+1}{4} \geq (m - \frac{m+1}{2})(0 - \frac{m-1}{2}) + \frac{m^2+2m+1}{4}$$

$$(p - \frac{m+1}{2})(q - \frac{m-1}{2}) + \frac{m^2+2m+1}{4} \geq (0 - \frac{m+1}{2})(m - \frac{m-1}{2}) + \frac{m^2+2m+1}{4}$$

当 $p = m$ 时, 数表 A 中至少含有 $m \times \frac{m+1}{2}$ 个 1,

而 $m \times \frac{m+1}{2} > m + (m-1) \times \frac{m-1}{2}$, 所以 q 至少为 2

$$\begin{aligned}
 &\text{此时 } (p - \frac{m+1}{2})(q - \frac{m-1}{2}) + \frac{m^2 + 2m + 1}{4} \\
 &\geq (m - \frac{m+1}{2})(2 - \frac{m-1}{2}) + \frac{m^2 + 2m + 1}{4} = 2m - 1
 \end{aligned}$$

当 $p = m - 1$ 时, 数表 A 中至少含有 $(m-1) \times \frac{m+1}{2}$ 个 1

而 $(m-1) \times \frac{m+1}{2} > m \times \frac{m-1}{2}$, 所以 q 至少为 1

$$\begin{aligned}
 &\text{此时 } (p - \frac{m+1}{2})(q - \frac{m-1}{2}) + \frac{m^2 + 2m + 1}{4} \\
 &\geq [(m-1) - \frac{m+1}{2}][1 - \frac{m-1}{2}] + \frac{m^2 + 2m + 1}{4} = 2m - 2
 \end{aligned}$$

下面的数表满足条件, 其“好位置”的个数为 $2m - 2$

	$\frac{m-1}{2}$ 列				$\frac{m-1}{2}$ 列					
	}				}					
1	1	1	...	1	1	0	0	...	0	0
1	1	1	...	1	1	0	0	...	0	0
1	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	1	1	...	1	1	0	0	...	0	0
1	1	1	...	1	1	0	0	...	0	0
1	0	0	...	0	0	1	1	...	1	1
1	0	0	...	0	0	1	1	...	1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	0	0	⋮	0	0	1	1	...	1	1
1	0	0	⋮	0	0	1	1	...	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

} $\frac{m-1}{2}$ 行

} $\frac{m-1}{2}$ 行

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注