绝密★启用并使用完毕前

长郡中学2021届高三月考试卷（七）

数　学

本试卷共8页，22小题。全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{(x,y)|x+y=8,x,y\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{(x,y)|y>x+1\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

2. 1943年19岁的曹火星在平西根据地进行抗日宣传工作，他以切身经历创作了歌曲《没有共产党就没有中国》，后毛泽东主席将歌曲改名为《没有共产党就没有新中国》．2021年是中国共产党建党100周年．仅从逻辑学角度来看，"没有共产党就没有新中国"这句歌词中体现了"有共产党"是"有新中国"的

A．充分条件　　B．必要条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

3. 18世纪末期，挪威测量学家威塞尔首次利用坐标平面上的点来表示复数，使复数及其运算具有了几何意义，例如，$|z|=|OZ|$，也即复数 z 的模的几何意义为 z 对应的点 Z 到原点的距离．在复平面内，复数 $z_0=\dfrac{a+2i}{1+i}$（i是虚数单位，$a\in\mathbf{R}$）是纯虚数，其对应的点为 Z_0，Z 为曲线 $|z|=1$ 上的动点，则 Z_0 与 Z 之间的最小距离为

A．1　　B．2　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{3}{2}$

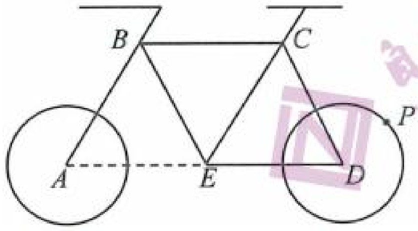
4. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=x\cdot 2^{|x|}$，$a=f(\log_3\sqrt{5})$，$b=-f\left(\log_3\dfrac{1}{2}\right)$，$c=f(\ln 3)$，则 a，b，c 的大小关系为

A．$c>b>a$　　B．$b>c>a$　　C．$a>b>c$　　D．$c>a>b$

5. 学校举行羽毛球混合双打比赛，每队由一男一女两名运动员组成．某班级从 3 名男生 A_1，A_2，A_3 和 4 名女生 B_1，B_2，B_3，B_4 中各随机选出两名，把选出的 4 人随机分成两队进行羽毛球混合双打比赛，则 A_1 和 B_1 两人组成一队参加比赛的概率为

A. $\dfrac{1}{18}$　　B. $\dfrac{2}{9}$　　C. $\dfrac{1}{6}$　　D. $\dfrac{4}{9}$

6. 骑自行车是一种能有效改善心肺功能的耐力性有氧运动，深受大众喜爱，下图是某一自行车的平面结构示意图，已知图中的圆 A（前轮），圆 D（后轮）的半径均为 $\sqrt{3}$，$\triangle ABE$，$\triangle BEC$，$\triangle ECD$ 均是边长为 4 的等边三角形．设点 P 为后轮上的一点，则在骑动该自行车的过程中，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BP}$ 的最大值为



A. 36　　B. 48　　C. 24　　D. 18

7. 素数在密码学、生物学等方面应用广泛，下表为森德拉姆（*Sundaram*，1934）素数筛法矩阵：

4	7	10	13	16	19	…
7	12	17	32	27	32	…
10	17	24	31	38	45	…
13	22	31	40	49	58	…
16	27	38	49	60	71	…
19	32	45	58	71	84	…
…	…	…	…	…	…	…

其特点是每行每列的数均成等差数列，如果正整数 n 出现在矩阵中，则 $2n+1$ 一定是合数，反之如果正整数 n 不在矩阵中，则 $2n+1$ 一定是素数，下面结论中不正确的是

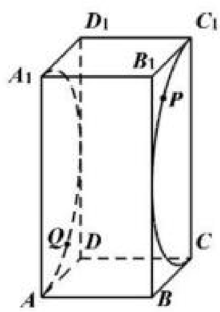
A. 第 4 行第 10 列的数为 94

B. 第 7 行的数构成公差为 15 的等差数列

C. 592 不会出现在此矩阵中

D. 第 10 列中前 10 行的数之和为 1255

8. 如图，已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为 1，侧棱长为 2，点 P，Q 分别在半圆弧 $\overset{\frown}{C_1C}$，$\overset{\frown}{A_1A}$（均不含端点）上，且 C_1，P，Q，C 在球 O 上，则



A. 当点 Q 在 $\overset{\frown}{A_1A}$ 的三等分点处，球 O 的表面积为 $\left(11-3\sqrt{3}\right)\pi$

B. 当点 P 在 $\overset{\frown}{C_1C}$ 的中点处，过 C_1，P，Q 三点的平面截正四棱柱所得的截面的形状都是四边形

C. 球 O 的表面积的取值范围为 $(4\pi,8\pi)$

D．当点 P 在 $\overset{\frown}{C_1C}$ 的中点处，三棱锥 C_1-PQC 的体积为定值

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分。

9．下列函数是奇函数，且在[－1，1]上单调递增的是

A．$f(x)=\sin x$　　B．$f(x)=-|x+1|$

C．$f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$　　D．$f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

10．若△ABC 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且满足 $b-2a+4a\sin^2\dfrac{A+B}{2}=0$，则下列结论正确的是

A．角 C 一定为锐角　　B．$a^2+2b^2-c^2=0$

C．$3\tan A+\tan C=0$　　D．$\tan B$ 的最小值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

11．设点 A，B 的坐标分别为（0，1），（1，0），P，Q 分别是曲线 $y=e^x$ 和 $y=\ln x$ 上的动点，记 $I_1=\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AB}, I_2=\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BA}$，则下列命题不正确的是

A．若 $I_1=I_2$，则 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{AB}$（$\lambda\in\mathbf{R}$）　　B．若 $I_1=I_2$，则 $|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BQ}|$

C．若 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{AB}$（$\lambda\in\mathbf{R}$），则 $I_1=I_2$　　D．若 $|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BQ}|$，则 $I_1=I_2$

12．意大利画家列奥纳多・达・芬奇（1452.4－1519.5）的画作《抱银貂的女人》中，女士脖颈上黑色珍珠项链与主人相互映衬呈现出不一样的美与光泽，达・芬奇提出：固定项链的两端，使其在重力的作用下自然下垂，项链所形成的曲线是什么？这就是著名的“悬链线问题”，后人给出了悬链线的函数解析式：$f(x)=a\cosh\dfrac{x}{a}$，其中 a 为悬链线系数．$\cos hx$ 称为双曲余弦函数，其函数表达式为 $\cos hx=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，相应地双曲正弦函数的表达式为 $\sin hx=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$．若直线 $x=m$ 与双曲余弦函数 C_1 与双曲正弦函数 C_2 的图象分别相交于点 A，B，曲线 C_1 在点 A 处的切线 l_1 与曲线 C_2 在点 B 处的切线 l_2 相交于点 P，则下列结论正确的为

A．$\cosh(x-y)=\cosh x\cosh y-\sinh x\sinh y$

B．$y=\sinh x\cosh x$ 是偶函数

C．$(\cos hx)'=\sin hx$

D．若△PAB 是以 A 为直角顶点的直角三角形，则实数 $m=0$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若某商品的广告费支出 x（单位：万元）与销售额 y（单位：万元）之间有如下对应数据：

x	2	4	5	6	8
y	20	40	60	70	80

根据上表，利用最小二乘法求得 y 关于 x 的回归直线方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+1.5$，据此预测，当投入 10 万元时，销售额的估计值为__________万元.

14. 二项式 $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{2}{x}\right)^{n}$ 的展开式中，仅有第六项的二项式系数取得最大值，则展开式中 $\sqrt{x}$ 项的系数是__________.

15. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)+h$ 的最小正周期为 π，若 $|f(x)|$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值为 M，则 M 的最小值为__________.

16. 2021 年是中国传统的“牛”年，可以在平面坐标系中用抛物线与圆勾勒出牛的形象．已知抛物线 $Z:x^2=4y$ 的焦点为 F，圆 $F:x^2+(y-1)^2=4$ 与抛物线 Z 在第一象限的交点为 $P\left(m,\dfrac{m}{4}\right)$，直线 $l:x=t$（$0<t<m$）与抛物线 Z 的交点为 A，直线 l 与圆 F 在第一象限的交点为 B，则 $m=$__________；$\triangle FAB$ 周长的取值范围为__________．（第一空 2 分，第二空 3 分）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （本小题满分 10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=5$ 且 $a_n=2a_{n-1}+2^n-1(n\geqslant2$ 且 $n\in N^*)$.

（1）证明：数列 $\left\{\dfrac{a_n-1}{2^n}\right\}$ 为等差数列；

（2）求数列 $\{a_n-1\}$ 的前 n 项和 S_n.

18. （本小题满分 12 分）

在三角形 ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c，若 $2b\cos B=a\cos C+c\cos A$.

（1）求角 B 的大小；

（2）若线段 BC 上存在一点 D，使得 $AD=2$，且 $AC=\sqrt{6}$，$CD=\sqrt{3}-1$，求 $S_{\triangle ABC}$.

19．（本小题满分 12 分）

一支担负勘探任务的队伍有若干个勘探小组和两类勘探人员，甲类人员应用某种新型勘探技术的精准率为 0.6，乙类人员应用这种勘探技术的精准率为 $a(0<a<0.4)$．每个勘探小组配备 1 名甲类人员与 2 名乙类人员，假设在执行任务中每位人员均有一次应用这种技术的机会且互不影响，记在执行任务中每个勘探小组能精准应用这种新型技术的人员数量为 ξ．

（1）证明：在 ξ 各个取值对应的概率中，概率 $P(\xi=1)$ 的值最大．

（2）在特殊的勘探任务中，每次只能派一个勘探小组出发，工作时间不超过半小时，如果半小时内无法完成任务，则重新派另一组出发．现在有三个勘探小组 $A_i(i=1，2，3)$ 可派出，若小组 A_i 能完成特殊任务的概率 t；$t_i=P(\xi=i)(i=1，2，3)$，且各个小组能否完成任务相互独立．试分析以怎样的先后顺序派出勘探小组，可使在特殊勘探时所需派出的小组个数的均值达到最小．

20．（本小题满分 12 分）

如图 1，矩形 $ABCD$ 中，$\sqrt{3}AB=BC$，将矩形 $ABCD$ 折起，使点 A 与点 C 重合，折痕为 EF，连接 AF、CE，以 AF 和 EF 为折痕，将四边形 $ABFE$ 折起，使点 B 落在线段 FC 上，将△CDE 向上折起，使平面 DEC⊥平面 FEC，如图 2．

（1）证明：平面 ABE⊥平面 EFC；

（2）连接 BE、BD，求锐二面角 $A-BE-D$ 的正弦值．

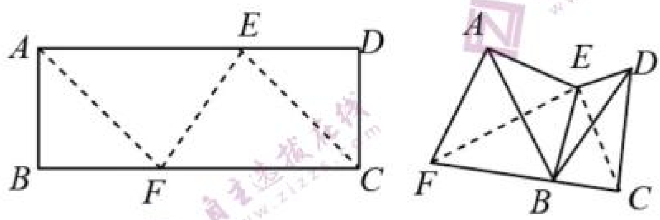


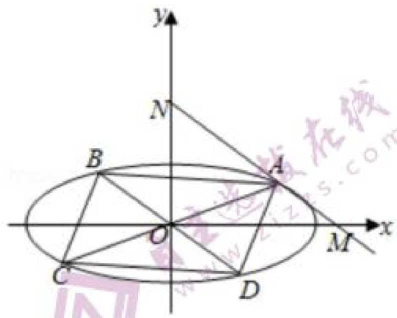
图1　图2

21. （本小题满分 12 分）

已知椭圆 $O:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $(\sqrt{3}，-\frac{1}{2})$，$A(x_0，y_0)(x_0y_0\neq 0)$，其上顶点到直线 $\sqrt{3}x+y+3=0$ 的距离为 2，过点 A 的直线 l 与 x，y 轴的交点分别为 M、N，且 $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{MA}$．

（1）证明：$|MN|$ 为定值；

（2）如图所示，若 A，C 关于原点对称，B，D 关于原点对称，且 $\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{NM}$，求四边形 $ABCD$ 面积的最大值．



22．（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=e^x+ax$ 的图象与直线 $y=(e^2+1)x-e^2$ 相切．

（1）求实数 a 的值；

（2）若存在实数 k 满足 $f(k)<0$ 且 $f(\frac{1}{k})<0$，求证：$e^x>ln(x-k-\frac{1}{k})$．

长郡中学2021届高三月考试卷（七）

数学参考答案

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	B	A	D	C	A	C	D

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

题号	9	10	11	12
答案	AC	BC	ABD	ACD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．106.5　　14．$-\dfrac{15}{2}$　　15．$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$　　16．2；（4，6）

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（1）证明：根据题意，数列$\{a_n\}$满足$a_n=2a_{n-1}+2^n-1$

则有$a_n-1=2a_{n-1}+2^n-2=2(a_{n-1}-1)+2^n$，

变形可得：$\dfrac{a_n-1}{2^n}=\dfrac{a_{n-1}-1}{2^{n-1}}+1$，即$\dfrac{a_n-1}{2^n}-\dfrac{a_{n-1}-1}{2^{n-1}}=1$，

又由$a_1=5$，则$\dfrac{a_1-1}{2}=2$，

则数列$\{\dfrac{a_n-1}{2^n}\}$是以2为首项，1为公差的等差数列．……………………（5分）

（2）由（1）可得：数列$\{\dfrac{a_n-1}{2^n}\}$是以2为首项，1为公差的等差数列，

则$\dfrac{a_n-1}{2^n}=2+(n-1)=n+1$，

则$a_n-1=(n+1)\times2^n$．……………………………………………（7分）

则$S_n=(2\times2)+(3\times2^2)+(4\times2^3)+\ldots+[(n+1)\times2^n]$，①

则有$2S_n=(2\times2^2)+(3\times2^3)+(4\times2^4)+\ldots+[(n+1)\times2^{n+1}]$，①

①－②可得：$-S_n=4+[2^2+2^3+\ldots+2^n]-(n+1)\times2^{n+1}$，

变形可得：$S_n=n\cdot2^{n+1}$．……………………………………………（10分）

18．（1）$\because 2b\cos B=a\cos C+c\cos A$，

$\therefore$根据正弦定理，可得$2\sin B\cos B=\sin A\cos C+\sin C\cos A$，

即$2\sin B\cos B=\sin(A+C)$．

又$\because\Delta ABC$中，$\sin(A+C)=\sin(180^\circ-B)=\sin B>0$

$\therefore 2\sin B\cos B=\sin B$，两边约去 $\sin B$ 得 $2\cos B=1$，即 $\cos B=\frac{1}{2}$，

$\because B\in(0,\pi)$，

$\therefore B=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………………（6 分）

（2）$\because$ 在 ΔACD 中，$AD=2$，且 $AC=\sqrt{6}$，$CD=\sqrt{3}-1$，

$\therefore$ 由余弦定理可得：$\cos C=\frac{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{3}-1)^2-4}{2\sqrt{6}\times(\sqrt{3}-1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore C=\frac{\pi}{4}$，

$\therefore A=\pi-B-C=\frac{5\pi}{12}$，

由 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$，可得 $\frac{\sqrt{6}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{AB}{\sin\frac{\pi}{4}}$，

$\therefore AB=2$，

$$\therefore\ \begin{aligned}S_{\Delta ABC}&=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin A=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{6}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\\&=\sqrt{6}\cdot\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}\right)\\&=\sqrt{6}\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\\&=\frac{3+\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$ ……（12 分）

19.（1）由已知，ξ 的所有可能取值为 0，1，2，3，

$P(\xi=0)=(1-0.6)\cdot(1-a)^2=0.4(1-a)^2$，

$P(\xi=1)=0.6(1-a)^2+(1-0.6)\cdot C_2^1a(1-a)=0.2(1-a)(3+a)$，

$P(\xi=2)=0.6\cdot C_2^1a(1-a)+(1-0.6)a^2=0.4a(3-2a)$，

$P(\xi=3)=0.6a^2$. ………………………………………………（3 分）

$\because 0<a<0.4$，

$\therefore P(\xi=1)-P(\xi=0)=0.2(1-a)(1+3a)>0$，

$P(\xi=1)-P(\xi=2)=0.2(3a^2-8a+3)>0$，

$P(\xi=1)-P(\xi=3)=-0.2(4a^2+2a-3)>0$，

$\therefore$ 概率 $P(\xi=1)$ 的值最大. ………………………………………（6 分）

（2）由（1）可知，当 $0<a<0.4$ 时，有 $t_1=P(\xi=1)$ 的值最大，

且 $t_2-t_3=P(\xi=2)-P(\xi=3)=0.2a(6-7a)>0$，

$\therefore t_1>t_2>t_3$．

$\therefore$ 应当以 A_1，A_2，A_3 的顺序派出勘探小组，可使在特殊勘探时所需派出的小组个数的均值达到最小，即优先派出完成任务概率大的小组可减少所需派出的小组个数的均值．……………………………………………………………（7 分）

证明如下：

假定 p_1，p_2，p_3 为 t_1，t_2，$t_3(t_1>t_2>t_3)$ 的任意一个排列，即若三个小组 $A_i(i=1$，2，$3)$ 按照某顺序派出，该顺序下三个小组能完成特殊任务的概率依次为 p_1，p_2，p_3，记在特殊勘探时所需派出的小组个数为 η，则 $\eta=1$，2，3，且 η 的分布列为

η	1	2	3
P	p_1	$(1-p_1)p_2$	$(1-p_1)(1-p_2)$

$\therefore$ 数学期望 $E(\eta)=p_1+2(1-p_1)p_2+3(1-p_1)(1-p_2)=3-2p_1-p_2+p_1p_2$．…（9 分）

下面证明 $E(\eta)=3-2p_1-p_2+p_1p_2\geqslant 3-2t_1-t_2+t_1t_2$ 成立，

$\because (3-2p_1-p_2+p_1p_2)-(3-2t_1-t_2+t_1t_2)$

$=2(t_1-p_1)+(t_2-p_2)+p_1p_2-p_1t_2+p_1t_2-t_1t_2$

$=2(t_1-p_1)+(t_2-p_2)+p_1(p_2-t_2)+t_2(p_1-t_1)$

$=(2-t_2)(t_1-p_1)+(1-p_1)(t_2-p_2)$

$\geqslant(1-p_1)(t_1-p_1)+(1-p_1)(t_2-p_2)$

$=(1-p_1)[(t_1+t_2)-(p_1+p_2)]\geqslant 0$．……………………………………（11 分）

$\therefore$ 按照完成任务概率从大到小的 A_1，A_2，A_3 的先后顺序派出勘探小组，可使在特殊勘探时所需派出的小组个数的均值达到最小．………………………（12 分）

20．（1）证明：在平面 $ABCD$ 中，$AF=FC$，$BF+FC=\sqrt{3}AB$，

设 $AB=\sqrt{3}a$，则 $BC=3a$，设 $BF=x$，

在$\triangle BAF$中，$x^2+3a^2=(3a-x)^2$，解得$x=a$，则$AF=FC=2a$，

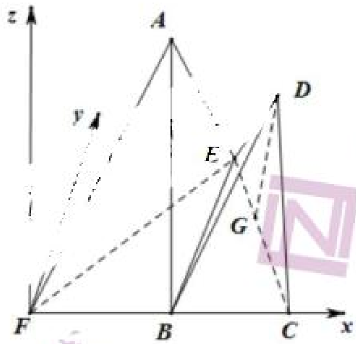
因为点B落在线段FC上，所以$BC=DE=a$，所以$BE\perp FC$，

又$AB\perp BF$即$AB\perp CF$，$AB\cap BE=B$，$AB,BE\subset$平面ABE，

所以$CF\perp$平面ABE，

由$CF\subset$平面EFC可得平面$ABE\perp$平面EFC. ························（4分）

（2）以F为原点，FC为x轴，过点F平行BE的方向作为作y轴，过点F垂直于平面EFC的方向作为z轴，建立如图所示空间直角坐标系，



则$C(2a,0,0),F(0,0,0),E(a,\sqrt{3}a,0),B(a,0,0)$，$\overrightarrow{BE}=(0,\sqrt{3}a,0)$，

易得平面ABE的一个法向量为$\overrightarrow{FC}=(2a,0,0)$，

作$DG\perp EC$于G，因为平面$DEC\perp$平面FEC，所以$DG\perp$平面EFC，

则$G\left(\frac{5}{4}a,\frac{3\sqrt{3}a}{4},0\right)$，$D\left(\frac{5}{4}a,\frac{3\sqrt{3}a}{4},\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$，$\overrightarrow{BD}=\left(\frac{1}{4}a,\frac{3\sqrt{3}a}{4},\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$，

设平面DBE的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=\sqrt{3}ay=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{4}ax+\frac{3\sqrt{3}a}{4}y+\frac{\sqrt{3}a}{2}z=0\end{cases}$，令$z=\sqrt{3}$则$\vec{n}=(-6,0,\sqrt{3})$，

因为$\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{FC}\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{FC}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{FC}|}=\dfrac{-12a}{2a\cdot\sqrt{39}}=\dfrac{-2\sqrt{39}}{13}$，

所以锐二面角A-BE-D的正弦值为$\sqrt{1-\left(-\frac{2\sqrt{39}}{13}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{13}$. ·············（12分）

21.（1）证明：其上顶点$(0,b)$到直线$\sqrt{3}x+y+3=0$的距离为2，$\therefore\frac{b+3}{2}=2$，解得$b=1$.

又椭圆O：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$(\sqrt{3}$，$-\frac{1}{2})$，$\therefore\frac{3}{a^2}+\frac{1}{4}=1$，解得$a^2=4$.

$\therefore$椭圆的标准方程为：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

点 A 在椭圆上，$\therefore\dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$. ……………………………………………(2 分)

设经过点 A 的直线方程为：$y-y_0=k(x-x_0)$，

可得 $M(x_0-\dfrac{y_0}{k},0)$，$N(0,y_0-kx_0)$.

$\because\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{MA}$，$\therefore -x_0=\dfrac{2y_0}{k}$，即 $k=-\dfrac{2y_0}{x_0}$.

$\therefore|MN|=\sqrt{(x_0-\dfrac{y_0}{k})^2+(y_0-kx_0)^2}=\sqrt{\dfrac{9}{4}x_0^2+9y_0^2}=3$ 为定值. ………………(4 分)

(2) 解：①$k\neq\pm\sqrt{2}$，0.

由（1）可得：$k=-\dfrac{2y_0}{x_0}$.

$\because\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{NM}$，$\therefore k_{OB}=k\neq 0$，$k\neq\pm\sqrt{2}$.

$\therefore\dfrac{k_{OB}}{k_{OA}}=\dfrac{k}{\dfrac{y_0}{x_0}}=-2$. $\therefore k_{OA}=-\dfrac{1}{2}k$.

联立 $\begin{cases}y=kx\\x^2+4y^2=4\end{cases}$，化为：$x^2=\dfrac{4}{1+4k^2}$，$y^2=\dfrac{4k^2}{1+4k^2}$，

可得：$|OB|^2=\dfrac{4+4k^2}{1+4k^2}$.

联立 $\begin{cases}y=-\dfrac{1}{2}kx\\x^2+4y^2=4\end{cases}$，解得 $x^2=\dfrac{4}{1+k^2}$，$y^2=\dfrac{k^2}{1+k^2}$，

$\therefore|OA|^2=\dfrac{4+k^2}{1+k^2}$. …………………………………………………………(7 分)

设 $\angle AOx=\alpha$，$\angle BOx=\beta$.

$\therefore\tan\angle BOA=\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{k-(-\frac{1}{2}k)}{1-\frac{1}{2}k^2}=\dfrac{3k}{2-k^2}$.

设 $S_{四边形ABCD}=S$，

$\sin^2\angle BOA=\dfrac{sin^2\angle BOA}{sin^2\angle BOA+cos^2\angle BOA}=\dfrac{tan^2\angle BOA}{tan^2\angle BOA+1}=\dfrac{9k^2}{k^4+5k^2+4}$.

$$S^2=16\times\frac{1}{4}\times|OA|^2\cdot|OB|^2\times\sin^2\angle BOA=4\times\frac{4+4k^2}{1+4k^2}\times\frac{4+k^2}{1+k^2}\times\frac{9k^2}{k^4+5k^2+4}$$

$$=\frac{144k^2}{4k^4+5k^2+1}$$

$$=\frac{144}{4k^2+\frac{1}{k^2}+5}\le 16$$

$\therefore S\leqslant 4$，当且仅当$k^2=\frac{1}{2}$时取等号．………………………………(10 分)

②$k=\pm\sqrt{2}$时，$OA\perp OB$，可得$S^2=4\times\frac{4+4k^2}{1+4k^2}\times\frac{4+k^2}{1+k^2}=\frac{16(4+k^2)}{1+4k^2}=\frac{96}{9}<16$，

$\therefore S<4$．

综上可得：S的最大值为 4．………………………………………(12 分)

22.（1）设切点为(x_0, y_0)，则$e^{x_0}+a=e^2+1$，$e^{x_0}+ax_0=(e^2+1)x_0-e^2$，

消a得$x_0e^{x_0}-e^{x_0}-e^2=0$，令$h(x)=xe^x-e^x-e^2$，得$h'(x)=xe^x$，

所以$h(x)$在区间$(0,+\infty)$单调递增，且h（2）$=0$，

又因为当$x\leqslant 0$时，$h(x)<0$，所以$x_0=2$，

得$a=e^2+1-e^{x_0}=1$．……………………………………………（4 分）

（2）由已知$a=1$得$f(x)=e^x+x$，则$f(k)<0$且$f(\frac{1}{k})<0$，

即$e^k+k<0$，$e^{\frac{1}{k}}+\frac{1}{k}<0$．………………………………（5 分）

因为函数$f(x)=e^x+x$为增函数，且$f(0)=1>0$，

所以$k<0$，$\frac{1}{k}<0$，令$m=k+\frac{1}{k}$，得$m\leqslant -2$．……………………（6 分）

令$J(x)=e^x-ln(x-m)$，$J'(x)=e^x-\frac{1}{x-m}$，

因为$J'(x)$在$(m,+\infty)$为单调递增函数，

$J'(k)=e^k+k<0$，$J'(\frac{1}{k})=e^{\frac{1}{k}}+\frac{1}{k}<0$，$J'(0)=1+\frac{1}{m}>0$．

所以存在x_1，使得$J'(x_1)=0$，且$x_1>k$，$x_1>\frac{1}{k}$，$x_1<0$．并且有$x_1>m$．

得函数$J(x)$在(m,x_1)为单调递减函数，在$(x_1, +\infty)$上是单调递增函数，

所以$J(x)_{min}=J(x_1)=e^{x_1}-ln(x_1-m)$．……………………………(10 分)

又因为$x_1=-ln(x_1-m)$，所以原不等式$e^x>ln(x-k-\frac{1}{k})$成立．

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》