绵阳市高中2020级第二次诊断性考试

理科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．

DACBD　ABCAD　CA

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．

13．9　　14．$\frac{1}{3}$　　15．$\sqrt{5}$　　16．[1，3)

三、解答题：本大题共6小题，共70分．

17．**解：**（1）由 $3a\cos C+a^2\sin C=3b$，

可得 $3\sin A\cos C+a\sin A\sin C=3\sin B$，…………2分

又 $3\sin B=3\sin(A+C)=3(\sin A\cos C+\cos A\sin C)$，…………4分

∴ $a\sin A=3\cos A$，5分

且 $A=\frac{\pi}{3}$，可得 $a=\sqrt{3}$；…………6分

（2）由 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=c\cdot b\cdot\cos(\pi-A)=-\frac{1}{2}c\cdot b=-\frac{1}{2}$，可得 $c\cdot b=1$，…………8分

由余弦定理 $c^2+b^2=a^2+2bc\cdot\cos A=4$．…………9分

∵ $\overrightarrow{AT}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

平方可得 $(\overrightarrow{AT})^2=\frac{1}{4}[(\overrightarrow{AB})^2+(\overrightarrow{AC})^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}]$，…………10分

即 $(\overrightarrow{AT})^2=\frac{1}{4}(c^2+b^2+2bc\cos A)=\frac{5}{4}$，所以 $AT=\frac{\sqrt{5}}{2}$．…………12分

18．**解：**（1）因为0.92<0.99，根据统计学相关知识，R^2越大，意味着残差平方和 $\sum_{i=1}^{5}(y_i-\hat{y})^2$ 越小，那么拟合效果越好，因此选择非线性回归方程② $\hat{y}=\hat{m}x^2+\hat{n}$ 进行拟合更加符合问题实际．…………4分

（2）令 $u_i=x_i^2$，则先求出线性回归方程：$\hat{y}=\hat{m}u+\hat{n}$，…………5分

∵ $\overline{u}=\frac{1+4+9+16+25}{5}=11$，$\overline{y}=\frac{0.8+1.1+1.5+2.4+3.7}{5}=1.9$，…………7分

$\sum_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})^2=(1-11)^2+(4-11)^2+(9-11)^2+(16-11)^2+(25-11)^2=374$，…………9分

∴ $\hat{m}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})^2}=\frac{45.1}{374}\approx0.121$，…………10分

由$1.9=0.121\times11+\hat{n}$，得$\hat{n}=0.569\approx0.57$，…………………………………… 11 分

即$\hat{y}=0.12u+0.57$，

∴所求非线性回归方程为：$\hat{y}=0.12x^2+0.57$．…………………………………… 12 分

19．**解**：设$\{b_n\}$的公比为q，则$b_3=b_1\cdot q^2$，所以$\frac{8}{27}=\frac{2}{3}q^2$，

所以$q=\pm\frac{2}{3}$，……………………………………………………………………2 分

因为$\{b_n\}$的各项都为正，所以取$q=\frac{2}{3}$，…………………………………………3 分

所以$b_n=(\frac{2}{3})^n$．……………………………………………………………………4 分

若选①：由$2a_n-S_n=1(n\geq1)$，得$2a_{n-1}-S_{n-1}=1(n\geqslant2)$，…………………………5 分

两式相减得：$2a_n-2a_{n-1}-a_n=0$，整理得$a_n=2a_{n-1}(n\geqslant2)$，………………………6 分

因为$a_1=1\neq0$，所以$\{a_n\}$是公比为 2，首项为 1 的等比数列，…………………………7 分

∴$a_n=2^{n-1}$，………………………………………………………………………………8 分

∴$a_nb_n=\frac{1}{2}\times(\frac{4}{3})^n$，……………………………………………………………………9 分

∵$y=\frac{1}{2}\cdot(\frac{4}{3})^x$在$\mathbf{R}$上为增函数，……………………………………………………… 10 分

∴数列$\{a_nb_n\}$单调递增，没有最大值，………………………………………………… 11 分

∴不存在$m\in N^*$，使得对任意的$n\in N^*$，$a_nb_n\leqslant a_mb_m$恒成立．……………… 12 分

若选择②：因为$a_{n+1}\cdot a_{n-1}=a_n{}^2(n\geq2)$，且$a_1\neq0$，$a_2\neq0$，

∴$\{a_n\}$为等比数列，……………………………………………………………………6 分

公比$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{4}$，……………………………………………………………………7 分

∴$a_n=(\frac{1}{4})^{n-1}$，…………………………………………………………………………8 分

所以$a_nb_n=(\frac{1}{4})^{n-1}\cdot(\frac{2}{3})^n=4\cdot\frac{2^{-n}}{3^n}=4\cdot(\frac{1}{6})^n\leqslant4\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$．………………………… 10 分

当且仅当$n=1$时取得最大值$\frac{2}{3}$，…………………………………………………… 11 分

∴存在$m=1$，使得对任意的$n\in N^*$，$a_nb_n\leqslant a_mb_m$恒成立．………………… 12 分

若选择③：因为$a_n-1=a_{n-1}$，所以$a_n-a_{n-1}=1\ (n\geqslant2)$，…………………………5 分

∴$\{a_n\}$是以 1 为公差的等差数列，又$a_1=1$，………………………………………6 分

∴$a_n=n$，所以$a_nb_n=n\cdot(\frac{2}{3})^n$，…………………………………………………8 分

设 $c_n = a_n b_n$，则 $c_n - c_{n-1} = n\cdot(\frac{2}{3})^n - (n-1)\cdot(\frac{2}{3})^{n-1} = \frac{3-n}{3}\cdot(\frac{2}{3})^{n-1}$， ················9 分

$\therefore$ 当 $n<3$ 时， $c_n - c_{n-1} > 0$，所以 $c_n > c_{n-1}$，

当 $n=3$ 时， $c_n - c_{n-1} = 0$，所以 $c_n = c_{n-1}$，

当 $n>3$ 时， $c_n - c_{n-1} < 0$，所以 $c_n < c_{n-1}$，

则 $c_1 < c_2 = c_3 > c_4 > c_5 > \cdots$， ··11 分

$\therefore$ 存在 $m=2$ 或 3，使得对任意的 $n\in N^*$，$a_n b_n \leqslant a_m b_m$ 恒成立. ················12 分

20．**解**：（1）设 $B(x_1, y_1)$， $C(x_2, y_2)$，

直线 BC 的方程为： $x = my + 4$ ($m=\frac{1}{k}$)， ··1 分

联立 $\begin{cases} x = my + 4 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$，消 x 整理得： $(3m^2+4)y^2 + 24my + 36 = 0$， ················2 分

$\therefore y_1 + y_2 = \frac{-24m}{3m^2+4}$， $y_1\cdot y_2 = \frac{36}{3m^2+4}$ ··3 分

从而： $k_1\cdot k_2 = \frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_2}{x_2+2} = \frac{y_1\cdot y_2}{(my_1+6)(my_2+6)}$

$$= \frac{y_1 y_2}{m^2 y_1 y_2 + 6m(y_1+y_2) + 36}$$

$$= \frac{\frac{36}{3m^2+4}}{\frac{36m^2}{3m^2+4} - \frac{144m^2}{3m^2+4} + 36} = \frac{1}{4}$$

$\therefore k_1\cdot k_2$ 为定值 $\frac{1}{4}$. ··5 分

（2）直线 AB 的方程为： $y = \frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$， ··6 分

令 $x=4$，得到 $y_M = \frac{6y_1}{x_1+2} = \frac{6y_1}{my_1+6}$， ··7 分

同理： $y_N = \frac{6y_2}{my_2+6}$. ··8 分

从而 $|MN| = |y_M - y_N| = |\frac{6y_1}{my_1+6} - \frac{6y_2}{my_2+6}|$

$$= \frac{36|y_1 - y_2|}{|m^2 y_1 y_2 + 6m(y_1+y_2) + 36|}$$ ··9 分

又 $|y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2} = \frac{12\sqrt{m^2-4}}{3m^2+4}$，

$|m^2y_1y_2+6m(y_1+y_2)+36|=\dfrac{144}{3m^2+4}$， ………………………………………… 10 分

所以 $|MN|=3\sqrt{m^2-4}$， ………………………………………………………… 11 分

因为：$m=\dfrac{1}{k}\in[3，4]$，所以 $|MN|\in[3\sqrt{5}，6\sqrt{3}]$，

即线段 MN 长度的取值范围为 $[3\sqrt{5}，6\sqrt{3}]$． ……………………………………… 12 分

21．解：（1）由 a=1 时，$f'(x)=(x+1)(e^x-1)$， ………………………………………1 分

由 $f'(x)>0$ 解得：x>0 或 x<−1；由 $f'(x)<0$ 解得：−1< x<0. ………………………3 分

故 $f(x)$在区间 $(-\infty,-1)$, $(0,+\infty)$ 上单调递增，在区间(−1，0)上单调递减. ………4 分

∴$f(x)$的极大值是 $f(-1)=\dfrac{e-2}{2e}$，极小值是 $f(0)=0$； ……………………………………5 分

（2）$f'(x)=(x+1)(e^x-a)$，$x\in[0，2]$时，$e^x\in[1，e^2]$，且 $f(2)=2e^2-4a$，$f(0)=0$，

$\forall x_1，x_2\in[0，2]$，恒有 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\leqslant a+2e^2$ 等价于 $f(x)_{\max}-f(x)_{\min}\leqslant a+2e^2$．

i)若 $a\leqslant 1$ 时，$e^x-a\geqslant 0$，故 $f'(x)\geqslant 0$，所以 $f(x)$在区间[0，2]上单调递增，故

$f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=f(2)-f(0)=2e^2-4a\leqslant a+2e^2$，解得：$0\leqslant a\leqslant 1$， …………6 分

ii) 若 $a\geqslant e^2$ 时，$e^x-a\leqslant 0$，故 $f'(x)\leqslant 0$，所以 $f(x)$在区间[0，2]上单调递减，故

$f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=f(0)-f(2)=4a-2e^2\leqslant a+2e^2$，解得：$e^2\leqslant a\leqslant\dfrac{4}{3}e^2$，……7 分

iii) 若 $1<a<e^2$ 时，由 $f'(x)=(x+1)(e^x-a)>0$ 解得：$\ln a<x\leqslant 2$，故 $f(x)$在区间

$(\ln a，2]$ 上单调递增； ………………………………………………………………8 分

由 $f'(x)=(x+1)(e^x-a)<0$ 解得：$0\leqslant x<\ln a$，故 $f(x)$在区间 $[0,\ln a)$ 上单调递减.

∴ $f(x)_{\min}=f(\ln a)=-\dfrac{1}{2}a(\ln a)^2$，$f(x)_{\max}=f(2)$ 或 $f(0)$ ．

又 $f(2)-f(0)=2e^2-4a$， ………………………………………………………………9 分

①当 $1<a\leqslant\dfrac{e^2}{2}$ 时，$f(2)-f(0)\geqslant 0$，故

$f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=f(2)-f(\ln a)=2e^2-4a+\dfrac{1}{2}a(\ln a)^2\leqslant a+2e^2$，

解得：$0<a\leqslant e^{\sqrt{10}}$，又 $1<a\leqslant\dfrac{e^2}{2}$，故此时 $1<a\leqslant\dfrac{e^2}{2}$． ………………………… 10 分

②当 $\dfrac{e^2}{2}<a<e^2$ 时，$f(2)-f(0)<0$，故

$f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=f(0)-f(\ln a)=\dfrac{1}{2}a(\ln a)^2\leqslant a+2e^2$，

令 $h(a)=\dfrac{1}{2}a(\ln a)^2-a-2e^2$，则 $h'(a)=\dfrac{1}{2}(\ln a)^2+\ln a-1$，又 $\ln a\in(2-\ln 2,2)$，

故 $h'(a)=\frac{1}{2}(\ln a)^2+\ln a-1>0$，即 $h(a)$在区间 $(\frac{e^2}{2}，e^2)$ 上单调递增，

又 $h(e^2)=-e^2<0$，则 $\frac{1}{2}a(\ln a)^2\leqslant a+2e^2$ 恒成立．…………………………… 11 分

综上：$0\leqslant a\leqslant\frac{4}{3}e^2$．…………………………………………………………… 12 分

22．**解**：（1）①当 B 在线段 AO 上时，由$|OA|\cdot|OB|=4$，则 B（2，π）或（2，$\frac{3\pi}{2}$）；

②当 B 不在线段 AO 上时，设 B（ρ，θ），且满足$|OA|\cdot|OB|=4$，

∴A（$\frac{4}{\rho}$，$\theta+\pi$），…………………………………………………………………1 分

又∵A 在曲线 l 上，则 $\frac{4}{\rho}\cos(\theta+\pi)+\frac{4}{\rho}\sin(\theta+\pi)=-2$，……………………3 分

∴ $\rho=2\sin\theta+2\cos\theta$，………………………………………………………………4 分

又∵ $\pi\leqslant\theta+\pi\leqslant\frac{3\pi}{2}$，即 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$．

综上所述，曲线 C 的极坐标方程为：

$\rho=2\sin\theta+2\cos\theta$（$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$），或 $\rho=2$ (θ=π或θ=$\frac{3\pi}{2}$)．……………………5 分

（2）①若曲线 C 为：$\rho=2$ (θ=π或θ=$\frac{3\pi}{2}$)，此时 P，Q 重合，不符合题意；

②若曲线 C 为：$\rho=2\sin\theta+2\cos\theta$（$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$），设 l_1：$\theta=\alpha$（$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$），

又 l_1 与曲线 C 交于点 P，联立 $\begin{cases}\theta=\alpha,\\ \rho=2\sin\theta+2\cos\theta,\end{cases}$

得：$\rho_P=2\sin\alpha+2\cos\alpha$，……………………………………………………………6 分

又 l_1 与曲线 l 交于点 Q，联立 $\begin{cases}\theta=\alpha,\\ \rho\sin\theta+\rho\cos\theta=-2,\end{cases}$

得：$\rho_Q=\frac{-2}{\sin\alpha+\cos\alpha}$，…………………………………………………………………7 分

又∵M 是 P，Q 的中点，

$\rho_M=\frac{\rho_P+\rho_Q}{2}=\sin\alpha+\cos\alpha-\frac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$ $(0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2})$，…………………………8 分

令 $\sin\alpha+\cos\alpha=t$，则 $t=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$，

又∵ $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$，则 $\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{4}$，且 $1\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$，

$\therefore \rho_M = t - \dfrac{1}{t}(1 \leqslant t \leqslant \sqrt{2})$，且 $\rho_M = t - \dfrac{1}{t}$ 在 $\left[1, \sqrt{2}\right]$ 上是增函数，…………………9 分

$\therefore 0 \leqslant \rho_M \leqslant \sqrt{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且当 $\alpha + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ 时，即 $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ 时等号成立.

$\therefore \left|OM\right|$ 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………………………………………… 10 分

23．**解**：（1）由 $f(x) \leqslant 3$ 的解集为$[n，1]$，可知，1 是方程 $f(x)=3$ 的根，

$\therefore f(1)=3+|m+1|=3$，则 $m=-1$， ……………………………………………………1 分

$\therefore f(x)=|2x+1|+|x-1|$,

①当 $x \leqslant -\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=-3x \leqslant 3$，即 $x \geqslant -1$，解得：$-1 \leqslant x \leqslant -\dfrac{1}{2}$，…………2 分

②当 $\dfrac{1}{2} < x < 1$ 时，$f(x)=x+2 \leqslant 3$，解得：$-\dfrac{1}{2} < x < 1$，…………………………3 分

③当 $x \geqslant 1$ 时，$f(x)=3x \leqslant 3$，解得：$x=1$. ……………………………………………4 分

综上所述：$f(x)$ 的解集为$[-1，1]$，所以 $m=-1$，$n=-1$. ……………………………5 分

（2）由（1）可知 $m=-1$，则 $\dfrac{1}{2a} + \dfrac{2}{b} = 2$. ………………………………………………6 分

令 $\dfrac{1}{2a} = x$，$\dfrac{2}{b} = y$，则 $2a = \dfrac{1}{x}$，$b = \dfrac{2}{y}$，

又 a，b 均为正数，则 $x + y = 2$（$x > 0, y > 0$），

由基本不等式得，$2 = x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$，………………………………………………7 分

$\therefore xy \leqslant 1$，当且仅当 $x=y=1$ 时，等号成立.

所以有 $\dfrac{1}{xy} \geqslant 1$，当且仅当 $x=y=1$ 时，等号成立. ………………………………8 分

$$
\begin{aligned}
\text{又}\ 16a^2 + b^2 &= 4(2a)^2 + b^2 = \frac{4}{x^2} + \frac{4}{y^2} \\
&\geqslant 2\sqrt{\frac{4}{x^2} \cdot \frac{4}{y^2}} = \frac{8}{xy}
\end{aligned}
$$
(当且仅当 $x=y$ 时，等号成立). ……9 分

$\therefore 16a^2 + b^2 \geqslant 8$ 成立，(当且仅当，$a = \dfrac{1}{2}$，$b = 2$ 时等号成立). ……………… 10 分