红河州2023届高中毕业生第二次复习统一检测

数学参考答案及评分标准

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则。

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4．只给整数分数，单项选择题不给中间分。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.【答案】C.

【解析】由 $x^2-5x+4\le 0$，得 $1\le x\le 4$，所以 $A=\{x|1\le x\le 4\}$，

又由 $\log_2 x<1$，得 $0<x<2$，所以 $B=\{x|0<x<2\}$，

于是 $A\cup B=\{x|0<x\le 4\}$，故选C.

2.【答案】A.

【解析】由共轭复数定义得 $\overline{z}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，

$z^2=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，

所以 $z^2-\overline{z}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$.

故选A.

3.【答案】B.

【解析】设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，由函数 $f(x)=3\tan(\frac{\omega x}{2}+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$ 的图象上相邻两个对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{4}$，知 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{4}$，$T=\frac{\pi}{2}$，

又因为 $T=\frac{\pi}{\frac{\omega}{2}}$，所以 $\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\frac{\omega}{2}}$，即 $\frac{\omega}{2}=\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$，则 $\omega=4$.

故选B.

4.【答案】A.

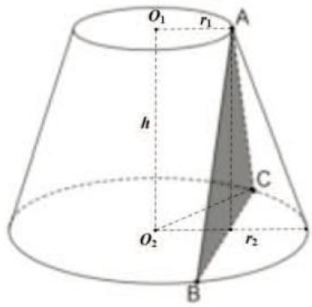
【解析】设圆台上底半径为r_1，下底半径为r_2，则$|BC|=2\sqrt{{r_2}^2-(r_2-6)^2}$，所以$r_2=15$，

$r_1=r_2-6=9$.

设圆台的高为h，$h=\sqrt{10^2-6^2}=8$，所以圆台的体积为：

$V=\frac{1}{3}\pi(9^2+15^2+9\times15)\times8\approx3528$（立方寸）.

故选 A.



第4题图

5.【答案】D.

【解析】

对于 A 选项，由频率分布直方图无法得到这组数据的最大值和最小值，故无法准确判断这组数据的极差，故 A 错误.

对于 B 选项，因为$(0.2+0.3+0.4)\times0.5=0.45$，$0.45+0.5\times0.5=0.7$，设中位数为$x$，由$0.45+0.5\times(x-2)=0.5$得$x=2.1$，故 B 错误.

对于 C 选项，众数为：$\frac{2+2.5}{2}=2.25$，故 C 错误.

对于 D 选项，月均用水量超过 3 立方米的频率为$(0.1+0.1+0.1)0.5=0.15$，故 D 正确.

故选 D.

6.【答案】D.

【解析】因为$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，两边平方得$1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{3}$，

即$2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2}{3}$，又因为$\alpha$为第三象限角，且$2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2}{3}>0$，

所以$\sin\alpha<0$，$\cos\alpha<0$，

所以$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{5}{3}$，所以$\sin\alpha+\cos\alpha=-\sqrt{\frac{5}{3}}=-\frac{\sqrt{15}}{3}$，

则$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)=(-\frac{\sqrt{3}}{3})\times(-\frac{\sqrt{15}}{3})=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

故$\tan2\alpha=\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故选 D.

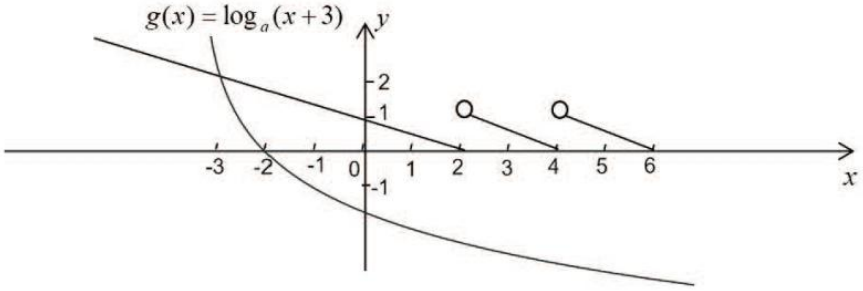
7.【答案】C.

【解析】当$x>2$时，由$f(x)=f(x-2)$，得当$x>2$时，$f(x)$的周期$T=2$.

设$x\in(2,4]$，则$x-2\in(0,2]$，$f(x)=f(x-2)=-\frac{1}{2}(x-2)+1=-\frac{1}{2}x+2$

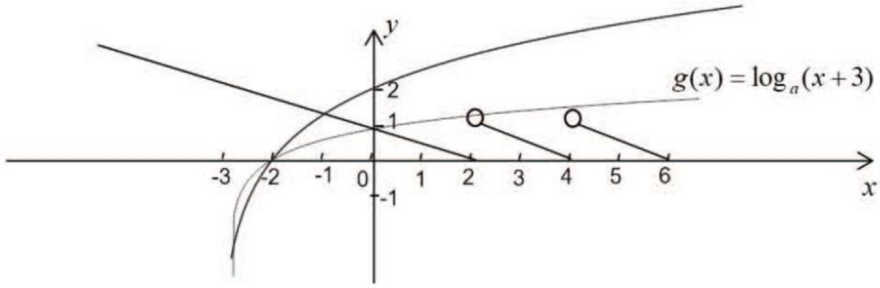
作出分段函数$f(x)$的图象，如图

当$0<a<1$时，



由图可知，$0<a<1$显然成立.

当$a>1$时，则$g(2)\geq 1$，$\log_a 5\geq 1$，即$1<a\leq 5$.



综上所述，$0<a\leq 5$且$a\neq 1$.

故选C.

8.【答案】B.

【解析】根据对称性，不妨设$A(0,b)$，

由已知，得$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，直线AF_1的方程为$\dfrac{x}{-c}+\dfrac{y}{b}=1$，

若点P在第一象限，则联立直线AF_1与直线$y=\dfrac{b}{a}x$，得$x_P=\dfrac{ac}{c-a}$，

$\left|x_P-x_{F_1}\right|=\left|\dfrac{ac}{c-a}+c\right|=\dfrac{c^2}{c-a}=\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{ac}{c-a}=\dfrac{c}{a}\left|x_P-x_A\right|$，即$|PF_1|=e|PA|$；

若点P在第二象限，联立直线AF_1与直线$y=-\dfrac{b}{a}x$，得$x_P=-\dfrac{ac}{c+a}$，

同理可得$|PF_1|=e|PA|$；

分别设点O和点F_2到直线AF_1的距离为d_1，d_2，则$d_2=2d_1$，

由$\triangle OPF_1$与$\triangle APF_2$的面积相等，得$\dfrac{1}{2}|PF_1|\cdot d_1=\dfrac{1}{2}|PA|\cdot d_2$，

即$e|PA|\cdot d_1=|PA|\cdot 2d_1$，所以离心率$e=2$.

故选B.

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9.【答案】ACD.

【解析】从甲盒、乙盒里分别随机抽取一个小球的样本空间为: $\{1,5\}$，$\{1,6\}$，$\{1,7\}$，$\{2,5\}$，$\{2,6\}$，$\{2,7\}$，$\{3,5\}$，$\{3,6\}$，$\{3,7\}$，$\{4,5\}$，$\{4,6\}$，$\{4,7\}$，共12种.

事件$A:\{2,5\}$，$\{2,6\}$，$\{2,7\}$，$P(A)=\frac{1}{4}$；事件$B:\{1,6\}$，$\{2,6\}$，$\{3,6\}$，$\{4,6\}$，

$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(AB)=\frac{1}{12}$，$P(AB)=P(A)P(B)$，故A正确;

事件C和事件D都有$\{3,7\}$，事件C与事件D不互斥，故B不正确;

事件$C:\{1,5\}$，$\{1,7\}$，$\{3,5\}$，$\{3,7\}$，$P(C)=\frac{1}{3}$，故C正确;

事件$D:\{3,7\}$，$\{4,6\}$，$\{4,7\}$，$P(D)=\frac{1}{4}$，$P(CD)=P(C)P(D)=\frac{1}{12}$，

$P(C\cup D)=P(C)+P(D)-P(CD)=\frac{1}{2}$，故D正确.

故正确选项为A，C，D.

10.【答案】ABC.

【解析】

对于选项A，因为$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})$,

所以$\overrightarrow{CD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

故A正确.

对于选项B，因为$\angle CAB=\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\rangle=\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\rangle$，

设$\angle CAB=\theta$，因为$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CE}=8$,

所以$(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC})=8$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}^2=8$，

所以$4\times8-4\times6\cos\theta-6\times8\cos\theta+36=8$，

则$\cos\theta=\frac{5}{6}$.

故B正确.

对于选项C，$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AF}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\angle CAB=6\times6\times\frac{5}{6}=30$.

故C正确.

对于选项D，因为

$\overrightarrow{CB}^2=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2=\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2=12^2-2\times12\times6\times\frac{5}{6}+6^2=60$，

所以$|\overrightarrow{CB}|=2\sqrt{15}$.

故D错误.

故选ABC.

11.【答案】AC.

【解析】对于选项A.，$mn>0 \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ n>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m<0 \\ n<0 \end{cases}$.

当 $\begin{cases} m>0 \\ n>0 \end{cases}$ 时，原方程可化为 $\dfrac{x^2}{\frac{1}{m}}-\dfrac{y^2}{\frac{1}{n}}=1$，所以 E 是焦点在 x 轴上的双曲线，其渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{\frac{1}{m}}}x=\pm\sqrt{\dfrac{m}{n}}x$；

当 $\begin{cases} m<0 \\ n<0 \end{cases}$ 时，原方程可化为 $\dfrac{y^2}{-\frac{1}{n}}-\dfrac{x^2}{-\frac{1}{m}}=1$，所以 E 是焦点在 y 轴上的双曲线，其渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{-\frac{1}{n}}}{\sqrt{-\frac{1}{m}}}x=\pm\sqrt{\dfrac{m}{n}}x$；故A正确；

对于选项B，当 $-n>m>0$ 时，$\dfrac{1}{m}>\dfrac{1}{-n}>0$，原方程可化为 $\dfrac{x^2}{\frac{1}{m}}+\dfrac{y^2}{-\frac{1}{n}}=1$，所以 E 是焦点在 x 轴上的椭圆，所以 $e^2=\dfrac{\frac{1}{m}-\left(-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{m}}=1+\dfrac{m}{n}$，所以 $e=\sqrt{1+\dfrac{m}{n}}$，故B错误；

对于选项C，当 $m=-n>0$ 时，原方程可化为 $x^2+y^2=-\dfrac{1}{n}$，所以 E 是圆，其圆心为 $(0,0)$，半径为 $\sqrt{-\dfrac{1}{n}}$，故C正确；

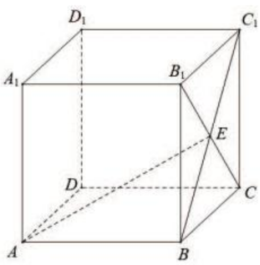
对于选项D，若 $m\neq 0$，$n=0$ 时，原方程可化为 $x^2=\dfrac{1}{m}$，当 $m>0$ 时，$x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{m}}$，此时 E 是两条直线，当 $m<0$ 时，上面方程无解，此时 E 不表示任何图形，故D错误.

故选AC.

12.【答案】BCD.

【解析】对于选项A：

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{DC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD_1}=\overrightarrow{DC}+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{DD_1}-\overrightarrow{DA}\right)=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DD_1}$，

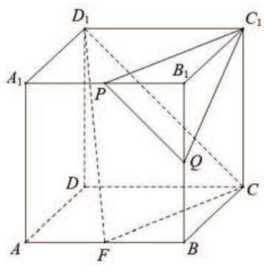


故A错误；

对于选项B：分别取 A_1B_1，BB_1 的中点 P，Q，连接 C_1P，C_1Q，PQ，则易证平面 $C_1PQ//$ 平面 CD_1F，所以点 M 的轨迹为线段 PQ，

所以 $PQ=\sqrt{2}$，

故B正确；

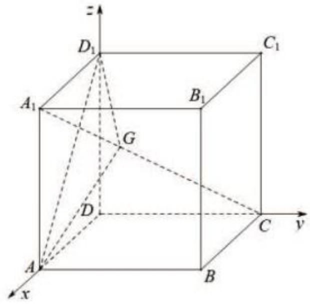


对于选项C：以 D 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 的方向为 x，y，z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，则 $A(2,0,0)$，$D_1(0,0,2)$，$A_1(2,0,2)$，$C(0,2,0)$.

由 $\overrightarrow{A_1G}=\lambda\overrightarrow{A_1C}$，$\lambda\in(0,1)$ 得，$G(-2\lambda+2,2\lambda,-2\lambda+2)$，

所以 $GA=\sqrt{(-2\lambda)^2+(2\lambda)^2+(-2\lambda+2)^2}=\sqrt{12\lambda^2-8\lambda+4}$，

同理可得 $GD_1=\sqrt{12\lambda^2-8\lambda+4}$，所以 $GA=GD_1$.



设 G 到 AD_1 的距离为 h，又 $AD_1=2\sqrt{2}$，则

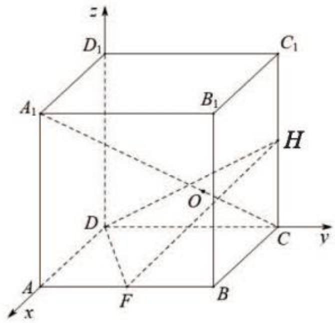
$$h^2=GA^2-\left(\frac{AD_1}{2}\right)^2=12\lambda^2-8\lambda+4-2=12\left(\lambda-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}.$$

因为 $S_{\triangle AGD_1}=\frac{1}{2}AD_1\cdot h=\sqrt{2}h$，要使 $\triangle AGD_1$ 的面积最小，

即要 h 最小，此时 $\lambda=\frac{1}{3}$，故C正确；

对于选项D：以 D 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 的方向为 x，y，z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，则 $D(0,0,0)$，$F(2,1,0)$，$C(0,2,0)$，$A_1(2,0,2)$，$H(0,2,1)$.

设 $\frac{A_1O}{A_1C}=m$，即 $\overrightarrow{A_1O}=m\overrightarrow{A_1C}$，则 $O(-2m+2,2m,-2m+2)$.



而 $\overrightarrow{A_1O}=\overrightarrow{A_1D}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{A_1D}+x\overrightarrow{DF}+y\overrightarrow{DH}$，

即 $(-2m,2m,-2m)=(-2+2x,\ x+2y,-2+y)$，

所以 $\begin{cases}-2m=-2+2x\\2m=x+2y\\-2m=-2+y\end{cases}$，解得 $m=\frac{5}{7}$，

所以 $\frac{A_1O}{A_1C}=\frac{A_1O}{A_1O+OC}=\frac{5}{7}$，所以 $\frac{A_1O}{OC}=\frac{5}{2}$，故D正确.

故选BCD.

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13.【答案】1.

【解析】

设 $g(x)=ae^x-e^{-x}$.

因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $g(x)$ 是奇函数，

所以 $g(0)=0$，解得 $a=1$.

14.【答案】13.

【解析】设 A 在第一象限，由对称性知直线 OA 的方程为 $y=\sqrt{3}x$.

由 $\begin{cases}x^2=4y\\ y=\sqrt{3}x\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=4\sqrt{3}\\ y=12\end{cases}$,即 $A(4\sqrt{3},12)$.

因为 E 的准线为 $y=-1$，

所以 $|AF|=y_A+1=12+1=13$.

15.【答案】$\frac{3}{2}+\ln 3$.

【解析】由 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-(a+3)x+\ln x$，

得 $f'(x)=3x-(a+3)+\frac{1}{x}=\frac{3x^2-(a+3)x+1}{x}$，

因为 $x=a$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，

所以 $f'(a)=0$，即 $3a^2-a^2-3a+1=0$，即 $2a^2-3a+1=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$ 或 $a=1$.

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，

$$f'(x)=\frac{3x^2-\frac{7}{2}x+1}{x}=\frac{(2x-1)(3x-2)}{2x},$$

当 $x>\frac{2}{3}$ 或 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$，当 $\frac{1}{2}<x<\frac{2}{3}$ 时，$f'(x)<0$，

所以，$f(x)$ 在区间 $(0,\frac{1}{2}),(\frac{2}{3},+\infty)$ 上单调递增，$f(x)$ 在 $(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$ 上单调递减，

所以 $x=\frac{1}{2}$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，不符合题意；

当 $a=1$ 时，$f'(x)=\frac{3x^2-4x+1}{x}=\frac{(3x-1)(x-1)}{x}$，

当 $x>1$ 或 $0<x<\frac{1}{3}$ 时，$f'(x)>0$，当 $\frac{1}{3}<x<1$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{1}{3}),(1,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)$ 在 $(\frac{1}{3},1)$ 上单调递减，

所以 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，$x=\frac{1}{3}$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，

又因为 $f(\frac{1}{3})=-\frac{7}{6}-\ln 3$，$f(3)=\frac{3}{2}+\ln 3$，

所以函数 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{4},3]$ 的最大值为 $\frac{3}{2}+\ln 3$.

答案为：$\frac{3}{2}+\ln 3$.

16.【答案】$(\frac{5}{3},+\infty)$

【解析】

因为 $a_1=3$，显然，$a_n\neq 1$.

又 $(a_{n+1}-1)(a_n-1)=4(a_n-a_{n+1})$，所以 $(a_{n+1}-1)(a_n-1)=4\left[(a_n-1)-(a_{n+1}-1)\right]$，

所以 $\dfrac{(a_n-1)-(a_{n+1}-1)}{(a_n-1)(a_{n+1}-1)}=\dfrac{1}{a_{n+1}-1}-\dfrac{1}{a_n-1}=\dfrac{1}{4}$.

又 $\dfrac{1}{a_1-1}=\dfrac{1}{2}$，所以数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-1}\right\}$ 是以 $\dfrac{1}{2}$ 为首项，$\dfrac{1}{4}$ 为公差的等差数列，

所以 $\dfrac{1}{a_n-1}=\dfrac{1}{a_1-1}+(n-1)\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}(n-1)=\dfrac{n+1}{4}$.

所以 $a_n=1+\dfrac{4}{n+1}=\dfrac{n+5}{n+1}$.

因为 $\{b_n\}$ 是递减数列，即 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$b_{n+1}<b_n$，即 $b_{n+1}-b_n<0$，代入可整理得

$\lambda>2a_{n+1}-a_n$ 恒成立，

$2a_{n+1}-a_n=\dfrac{2(n+6)}{n+2}-\dfrac{n+5}{n+1}=\dfrac{n^2+7n+2}{n^2+3n+2}=1+\dfrac{4n}{n^2+3n+2}=1+\dfrac{4}{n+\frac{2}{n}+3}$，

令 $g(n)=n+\dfrac{2}{n}$，$g(1)=g(2)<g(3)<g(4)<g(5)<\cdots$，

$g(n)_{\min}=g(1)=g(2)=3$，所以 $2a_{n+1}-a_n$ 最大值为 $\dfrac{5}{3}$，所以 $\lambda>\dfrac{5}{3}$.

故答案为：$(\frac{5}{3},+\infty)$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

解：（1）若选择条件①.

因为 a_1，a_3，a_{11} 成等比数列，所以 $a_3^2=a_1\times a_{11}$，……………………………1 分

$(a_1+2d)^2=a_1\times(a_1+10d)$，……………………………………………2 分

整理得 $2d^2=3a_1d$，又 $d>0$，……………………………………………3 分

解得 $d=3$，……………………………………………………………………4 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d=3n-1$ ……………………………5 分

若选择条件②.

因为$\dfrac{S_5}{5}-\dfrac{S_3}{3}=3$，所以$\dfrac{5a_1+10d}{5}-\dfrac{3a_1+3d}{3}=3$，……………………………1 分

$a_1+2d-(a_1+d)=3$，……………………………………………………3 分

解得$d=3$，……………………………………………………………4 分

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1+(n-1)d=3n-1$，………………………… 5 分

若选择条件③.

因为$a_{n+1}^2-3a_{n+1}=a_n^2+3a_n$，所以$a_{n+1}^2-a_n^2=3a_{n+1}+3a_n$，……………………1 分

即$(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)=3(a_{n+1}+a_n)$，……………………………………2 分

因为$a_1=2$，$d>0$，所以$a_{n+1}+a_n\neq 0$，…………………………………3 分

所以$a_{n+1}-a_n=3=d$，……………………………………………………4 分

则数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1+(n-1)d=3n-1$.……………………… …5 分

（2）解法一：$T_{2n}=b_1+b_2+\cdots+b_{2n-1}+b_{2n}$……………………………………………6 分

$=(1-a_1)+(a_2+1)+\cdots+(1-a_{2n-1})+(a_{2n}+1)$……………………………7 分

$=-(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+n+(a_2+a_4+\cdots a_{2n})+n$……………………………8 分

$=-[2n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 6]+[5n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 6]+2n=5n$………………………………10 分

解法二：$T_{2n}=b_1+b_2+\cdots+b_{2n-1}+b_{2n}$……………………………………………………6 分

$=(1-a_1)+(a_2+1)+\cdots+(1-a_{2n-1})+(a_{2n}+1)$……………………………………7 分

$=(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots(a_{2n}-a_{2n-1})+n+n$…………………………………………8 分

$=3n+2n=5n$.…………………………………………………………………………10 分

18.（12 分）

解：

（1）平均分

$\bar{x}=\dfrac{35\times 6+45\times 14+55\times 30+65\times 74+75\times 42+85\times 23+95\times 11}{200}\approx 67.3$，…………1 分

前 4 组频率之和为$\dfrac{6+14+30+74}{200}=0.62$，前 5 组频率之和为$\dfrac{6+14+30+74+42}{200}=0.83$，

……………………………………………………………2 分

故第 80 百分位数位于第 5 组………………………………………………………3 分

设第 80 百分位数为x，则$x=70+10\times\dfrac{0.8-0.62}{0.21}\approx 78.6$. ………… ……………………4 分

则该市竞赛成绩的平均分和第 80 百分位数分别约为 67.3 和 78.6.…………………5 分

（2）抽到 60 分及以上的学生的概率为 $\frac{74+42+23+11}{200}=\frac{3}{4}$，……………………6 分

由题意，X 的可能取值为 0，1，2，3，且服从 $X\sim B\left(3,\frac{3}{4}\right)$，则 ……………8 分

$P(X=0)=C_3^0(1-\frac{3}{4})^3=\frac{1}{64}$，

$P(X=1)=C_3^1(\frac{3}{4})^1(1-\frac{3}{4})^2=\frac{9}{64}$ ，……………………………………………9 分

$P(X=2)=C_3^2(\frac{3}{4})^2(1-\frac{3}{4})^1=\frac{27}{64}$，

$P(X=3)=C_3^3(\frac{3}{4})^3=\frac{27}{64}$， ……………………………………10 分

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

………………………11 分

所以 $E(X)=3\times\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$ 或 $E(X)=0\times\frac{1}{64}+1\times\frac{9}{64}+2\times\frac{27}{64}+3\times\frac{27}{64}=\frac{9}{4}$. ………..12 分

19．（12 分）

（1）证明：由 $2\sin B=\sin A+\sin C$ 及正弦定理得 $2b=a+c$，………………………1 分

因为 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ ……………………………………………………2 分

$=\frac{a^2+c^2-(\frac{a+c}{2})^2}{2ac}=\frac{3(a^2+c^2)-2ac}{8ac}\geq\frac{6ac-2ac}{8ac}=\frac{1}{2}$ ………………4 分

即 $\cos B\geq\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=c$ 时，等号成立，

又因为 $B\in(0,\ \pi)$，所以 $0<B\leq\frac{\pi}{3}$； ……………………………………5 分

（2）$\sin B\cdot\cos 2B=\sin B\cdot(1-2\sin^2 B)=\sin B-2\sin^3 B$，………………………………6 分

设 $t=\sin B$，则 $\sin B\cdot\cos 2B=t-2t^3$，

因为 $0<B\leq\frac{\pi}{3}$，所以 $0<t\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$，……………………………………7 分

设 $f(t)=t-2t^3$，由 $f'(t)=1-6t^2=0$，得 $t=\frac{\sqrt{6}}{6}$，………………………………8 分

当 $t\in(0,\dfrac{\sqrt{6}}{6})$，$f'(t)>0$，$f(t)$ 单调递增；……………………………………9 分

当 $t\in(\dfrac{\sqrt{6}}{6},\dfrac{\sqrt{3}}{2}]$，$f'(t)<0$，$f(t)$ 单调递减，……………………………………10 分

当 $t=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ 时，$f(t)$ 取得最大值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{9}$，……………………………………11 分

所以，$\sin B\cdot\cos 2B$ 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{9}$ ……………………………………12 分

20.（12 分）

（1）证明：由题知，四边形 $BDEF$ 为矩形，所以 $BF\parallel DE$，

又因为 $BF\not\subset$ 平面 ADE，$DE\subset$ 平面 ADE，

所以 $BF\parallel$ 平面 ADE，……………………………………1 分

同理可证 $BC\parallel$ 平面 ADE，

又因为 $BC\cap BF=B$，BC，$BF\subset$ 平面 BCF

所以平面 $BCF\parallel$ 平面 ADE，……………………………………2 分

又因为 M 为线段 BF 上的一个动点，所以 $CM\subset$ 平面 BCF，……………3 分

所以 $CM\parallel$ 平面 ADE.……………………………………4 分

（2）因为平面 $ABCD\perp$ 平面 $BDEF$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $BDEF=BD$，$DE\perp DB$，

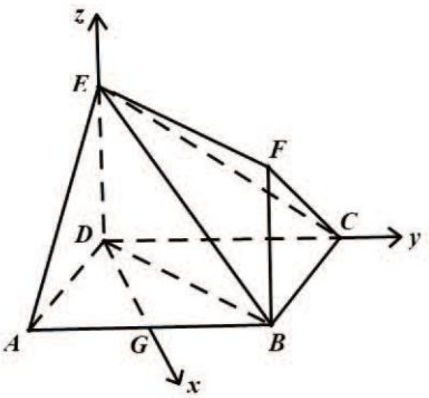
$DE\subset$ 平面 $BDEF$

所以 $DE\perp$ 平面 $ABCD$. ……………………………5 分

又因为底面 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle BAD=60^\circ$，$AB=2$，

所以 $\triangle ABD$ 为等边三角形，且 $AB=BD=2$，设 $BF=a$，……………………6 分

取 AB 的中点为 G，连接 DG，以 D 为坐标原点，以 $\overrightarrow{DG}$ 的方向为 x 轴 正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，则



$B(\sqrt{3},1,0)$，$C(0,2,0)$，$E(0,0,a)$，$F(\sqrt{3},1,a)$， ……………………7 分

则 $\overrightarrow{CF}=(\sqrt{3},-1,a)$，$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{CE}=(0,-2,a)$， ………………8 分

设平面 BCE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}-\sqrt{3}x+y=0\\-2y+az=0\end{cases}$，取 $x=1$，则 $y=\sqrt{3}$，$z=\dfrac{2\sqrt{3}}{a}$，即 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{a})$. …………9 分

设直线 CF 与平面 BCE 所成角为 θ，则

$$\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{CF},\boldsymbol{n}\rangle\right|=\frac{|\overrightarrow{CF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{CF}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\left|\sqrt{3}-\sqrt{3}+a\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{a}\right|}{\sqrt{4+a^2}\cdot\sqrt{4+\dfrac{12}{a^2}}}=\frac{\sqrt{15}}{10},$$

化简可得 $a^4-13a^2+12=0$，解得 $a=2\sqrt{3}$ 或 $a=1$ ………………………….10 分

设点 F 到平面 BCE 的距离为 d，

当 $a=2\sqrt{3}$ 时，$\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},1)$，$\overrightarrow{BF}=(0,0,2\sqrt{3})$，则

$$d=\frac{|\overrightarrow{BF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|0+0+2\sqrt{3}|}{\sqrt{1+3+1}}=\frac{2\sqrt{15}}{5};$$ ………………………….11 分

当 $a=1$ 时，$\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BF}=(0,0,1)$，则

$$d=\frac{|\overrightarrow{BF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|0+0+2\sqrt{3}|}{\sqrt{1+3+12}}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$ ………………………….12 分

故点 F 到平面 BCE 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$ 或 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

21.（12 分）

（1）由 $2c=2$，得 $c=1$，所以 $F(-1,0)$,……………………….1 分

又由 $\overrightarrow{QF}\cdot\overrightarrow{QA}=|\overrightarrow{QF}||\overrightarrow{QA}|$，得 $<\overrightarrow{QF},\overrightarrow{QA}>=0°$，$Q$ 为椭圆 E 的左顶点，……………2 分

$\overrightarrow{QF}\cdot\overrightarrow{QA}=|\overrightarrow{QF}||\overrightarrow{QA}|=(a-c)\times2a=(a-1)\times2a=4$，解得 $a=2$，………………………..3 分

所以 $b^2=a^2-c^2=4-1=3$，…………………………………………………..4 分

故 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ …………………………………………………..5 分

（2）由△PMN 的内切圆的圆心在直线 $x=-1$ 上，知直线 PM，PN 关于直线 $x=-1$ 对称，

所以直线 PM，PN 的倾斜角互补，即 $k_{PM}+k_{PN}=0$ …………………………..6 分

联立 $\begin{cases}y=kx+m\\\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$ ………………………..7 分

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则$\Delta=-48m^2+144+192k^2>0$，

$x_1+x_2=-\dfrac{8km}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{4k^2+3}$，…………………………………………8 分

所以$k_{PM}+k_{PN}=\dfrac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1+1}+\dfrac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2+1}=0$，

即$2kx_1x_2+(k+m-\frac{3}{2})(x_1+x_2)+2m-3=0$，　　…………………………9 分

即$4k^2+8k+3-4km-2m=0$，

即$(2k+1)(2k+3-2m)=0$．　…………………………………………………10 分

若$2k+3-2m=0$即$m=k+\frac{3}{2}$，

直线MN的方程为$y-\frac{3}{2}=k(x+1)$，

此时直线MN过点P，不合题意，　…………………………………………11 分

所以$2k+1=0$，即$k=-\frac{1}{2}$，故直线MN的斜率为$-\frac{1}{2}$．……………………12 分

22．

解：(1) 由题意可知$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$

$f'(x)=\dfrac{(2x+a)e^x-(x^2+ax+a)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{(-x^2-ax+2x)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{-x(x+a-2)}{e^x}$　……………1 分

令$f'(x)=0$，则$x_1=0$，$x_2=2-a$　…………………………………………2 分

①当$a=2$时，$x_1=x_2=0$，$f'(x)\le0$在$\mathbf{R}$上恒成立，$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减．……….3 分

②当$a>2$时，$x_1>x_2$，$x\in(-\infty,2-a)$时，$f'(x)<0$，$x\in(2-a,0)$时，$f'(x)>0$，$(0,+\infty)$时，$f'(x)<0$，

故$f(x)$在$(-\infty,2-a)$单调递减，在$(2-a,0)$单调递增，在$(0,+\infty)$单调递减．…….4 分

③当$a<2$时，$x_1<x_2$，$x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)<0$，$x\in(0,2-a)$时，$f'(x)>0$，$x\in(2-a,+\infty)$时，$f'(x)<0$，

故$f(x)$在$(-\infty,0)$单调递减，在$(0,2-a)$单调递增，在$(2-a,+\infty)$单调递减．　………..5 分

(2) 当$x\ge0$时，$f(x)\le2$恒成立，

故$\dfrac{x^2+ax+a}{e^x}\le2$，所以$x^2+ax+a\le2e^x$，即$a(x+1)\le2e^x-x^2$，

由$x+1>0$得$a\le\dfrac{2e^x-x^2}{x+1}$　…………………………………………………6 分

令$h(x)=\dfrac{2e^x-x^2}{x+1}$（$x\ge0$），则

$h'(x)=\dfrac{(2e^x-2x)(x+1)-(2e^x-x^2)}{(x+1)^2}=\dfrac{x(2e^x-x-2)}{(x+1)^2}$　……………………..7 分

令$t(x)=2e^x-x-2$，则$t'(x)=2e^x-1$

$t'(x)$在$[0,+\infty)$单调递增，则$t'(x)\geq t'(0)=1$

即$t'(x)>0$在$(0,+\infty)$恒成立，故$t(x)$在$[0,+\infty)$单调递增.

所以$t(x)\geq t(0)=0$

故$h'(x)\geq 0$在$[0,+\infty)$恒成立. ……………………………………………………8 分

由$h(x)$在$[0,+\infty)$单调递增，而$h(0)=2$，$h(x)\geq 2$，

故$a\leq 2$. ……………………………………………………9 分

（3）取$a=2$时，$x^2+2x+2\leq 2e^x$，则$x^2+2x+1\leq 2e^x-1$

所以$\dfrac{1}{2e^x-1}\leq\dfrac{1}{(x+1)^2}$ ……………………………………………………10 分

因此$\dfrac{1}{2e^n-1}\leq\dfrac{1}{(n+1)^2}<\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ ……………………………………………11 分

则$g(1)+g(2)+\cdots+g(n)<\dfrac{1}{(1+1)^2}+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{3}{4}$ ………12 分