

2019~2020 学年高三年级第五次调研考试
数学试题（理科）

考试时间：120 分钟 满分：150 分

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个符合题目要求的。）

1. $Z(M)$ 表示集合 M 中整数元素的个数，设集合 $A = \{x | -1 < x < 8\}$, $B = \{x | 5 < 2x < 17\}$, 则 $Z(A \cap B) = (\quad)$

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

2. 已知复数 z 满足 $(1+2i)z = 4+3i$, 则 z 的共轭复数是 ()

- A. $2-i$ B. $2+i$ C. $1+2i$ D. $1-2i$

3. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数，且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，则 ()

- A. $f(-3) < f(-\log_3 13) < f(2^{0.6})$ B. $f(-3) < f(2^{0.6}) < f(-\log_3 13)$
C. $f(2^{0.6}) < f(-\log_3 13) < f(-3)$ D. $f(2^{0.6}) < f(-3) < f(\log_3 13)$

4. 宋代诗词大师欧阳修的《卖油翁》中有一段关于卖油翁的精湛技艺的细节描写：“（翁）乃取一葫芦置于地，以钱覆其口，徐以杓酌油沥之，自钱孔入，而钱不湿。”如果铜钱是直径为 5cm 的圆，钱中间的正方形孔的边长为 2cm，则卖油翁向葫芦内注油，油正好进入孔中的概率是 ()

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{4}{25}$ C. $\frac{\pi}{25}$ D. $\frac{16}{25\pi}$

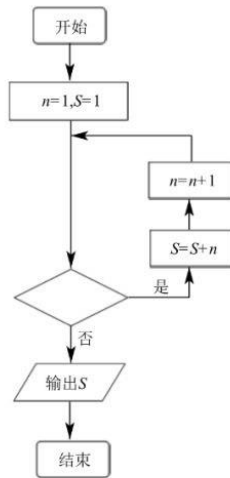
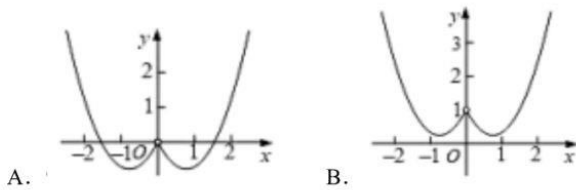
5. 命题 $p: x, y \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 < 2$, 命题 $q: x, y \in \mathbf{R}, |x| + |y| < 2$, 则 p 是 q 的 ()

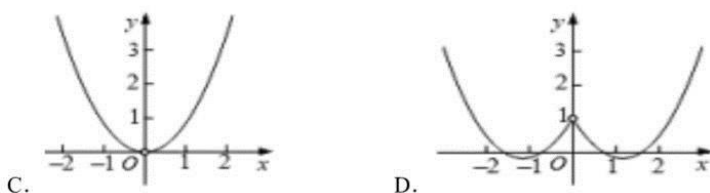
- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 必要充分条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + n$, 若利用如图所示的程序框图计算该数列的第 2020 项, 则判断框内的条件是 ()

- A. $n \leq 2018?$ B. $n \leq 2019?$
C. $n \leq 2020?$ D. $n \leq 2021?$

7. 函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x} + x^2 - 2|x|$ 的大致图象为 ()





8. 若函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $A > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 图象的一个对称中心为 $(\frac{\pi}{3}, 0)$, 其相邻一条对称轴方程为 $x = \frac{7\pi}{12}$, 该对称轴处所对应的函数值为 -1 , 为了得到 $g(x) = \cos 2x$ 的图象, 则只要将 $f(x)$ 的图象 ()

- A. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度
 B. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度
 C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度
 D. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

9. 已知 AB 是圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$ 的直径, 点 P 为直线 $x - y + 1 = 0$ 上任意一点, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值是 ()

- A. 1
 B. 0
 C. $\sqrt{2}$
 D. $\sqrt{2} - 1$

10. 圆锥 SD (其中 S 为顶点, D 为底面圆心) 的侧面积与底面积的比是 $2:1$, 则圆锥 SD 与它外接球 (即顶点在球面上且底面圆周也在球面上) 的体积比为 ()

- A. 9:32
 B. 8:27
 C. 9:22
 D. 9:28

11. 已知直线 $y = kx (k \neq 0)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 交于 A, B 两点, 以 AB 为直径的圆恰好经过双曲线的右焦点 F , 若 $\triangle ABF$ 的面积为 $4a^2$, 则双曲线的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$
 B. $\sqrt{3}$
 C. 2
 D. $\sqrt{5}$

12. 若对于任意的 $0 < x_1 < x_2 < a$, 都有 $\frac{x_2 \ln x_1 - x_1 \ln x_2}{x_1 - x_2} > 1$, 则 a 的最大值为 ()

- A. $2e$
 B. e
 C. $\frac{1}{2}$
 D. 1

二. 填空题 (本大题共 4 小题, 每题 5 分, 共 20 分.)

13. 在 $(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x})^n$ 的二项展开式中, 所有项的二项式系数之和为 256, 则常数项等于_____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $b = 2\sqrt{7}, c = 3, B = 2C$, 则 $\cos 2C$ 的值为_____.

15. 正四棱锥 $S-ABCD$ 底面边长为 2, 高为 1, E 是边 BC 的中点, 动点 P 在四棱锥表面上运动, 并且总保持 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, 则动点 P 的轨迹的周长为_____.

16. 定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) > 0$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 且 $2f(x) < xf'(x) < 3f(x)$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 则 $\frac{f(2)}{f(3)}$ 的取值范围是_____.

三.解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

17. (本小题 12 分) 在公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1^2 + a_2^2 = a_1 + a_2$.

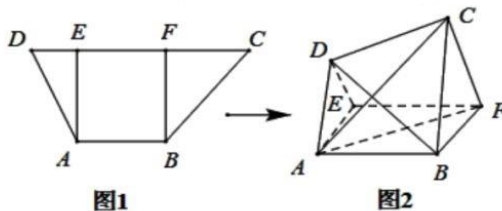
(1) 求 d 的取值范围;

(2) 已知 $d = -1$, 试问: 是否存在等差数列 $\{b_n\}$, 使得数列 $\left\{\frac{1}{a_n^2 + b_n}\right\}$ 的前 n 项和为 $\frac{n}{n+1}$? 若存在, 求 $\{b_n\}$ 的通项公式; 若不存在, 请说明理由.

18. (本小题 12 分) 如图 1, 梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 过 A, B 分别作 $AE \perp CD, BF \perp CD$, 垂足分别为 E, F . $AB = AE = 2, CD = 5$, 已知 $DE = 1$, 将梯形 $ABCD$ 沿 AE, BF 同侧折起, 得空间几何体 $ADE - BCF$, 如图 2.

(1) 若 $AF \perp BD$, 证明: $DE \perp$ 平面 $ABFE$;

(2) 若 $DE \parallel CF, CD = \sqrt{3}$, 线段 AB 上存在一点 P , 满足 CP 与平面 ACD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{20}$, 求 AP 的长.



19. (本小题 12 分) 《山东省高考改革试点方案》规定: 从 2017 年秋季高中入学的新生

开始,不分文理科;2020年开始,高考总成绩由语数外3门统考科目和物理、化学等六门选考科目构成.将每门选考科目的考生原始成绩从高到低划分为A、B+、B、C+、C、D+、D、E共8个等级.参照正态分布原则,确定各等级人数所占比例分别为3%、7%、16%、24%、24%、16%、7%、3%.选考科目成绩计入考生总成绩时,将A至E等级内的考生原始成绩,依照等比例转换法则,分别转换到[91,100]、[81,90]、[71,80]、[61,70]、[51,60]、[41,50]、[31,40]、[21,30]八个分数区间,得到考生的等级成绩.

某校高一年级共2000人,为给高一学生合理选科提供依据,对六个选考科目进行测试,其中物理考试原始成绩基本服从正态分布 $N(60,169)$.

- (1) 求物理原始成绩在区间(47,86)的人数;
- (2) 按高考改革方案,若从全省考生中随机抽取3人,记 X 表示这3人中等级成绩在区间[61,80]的人数,求 X 的分布列和数学期望.

(附:若随机变量 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$,则 $P(\mu - \sigma < \xi < \mu + \sigma) = 0.682$,
 $P(\mu - 2\sigma < \xi < \mu + 2\sigma) = 0.954$, $P(\mu - 3\sigma < \xi < \mu + 3\sigma) = 0.997$)

20. (本小题12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 点 $(1, e)$ 和 $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 都在椭圆 C 上,

其中 e 为椭圆 C 的离心率.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 若过原点的直线 $l_1: y = kx$ 与椭圆 C 交于 A, B 两点,且在直线 $l_2: 2kx - y + k - 2 = 0$ 上存在点 P ,使得 $\triangle PAB$ 是以 P 为直角顶点的直角三角形,求实数 k 的取值范围.

21. (本小题12分) 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{2}x^2 + ax (a \in \mathbf{R})$, $g(x) = e^x + \frac{3}{2}x^2 - x$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 定义: 对于函数 $f(x)$, 若存在 x_0 , 使 $f(x_0) = x_0$ 成立, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的不动点. 如果函数 $F(x) = f(x) - g(x)$ 存在不动点, 求实数 a 的取值范围.

请考生在 22、23 两题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22. (本小题 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的方程为 $\begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数). 以坐标原点 O 为极点, x

轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 2\cos\theta$.

- (1) 求 C_1, C_2 交点的直角坐标;
- (2) 设点 A 的极坐标为 $(4, \frac{\pi}{3})$, 点 B 是曲线 C_2 上的点, 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

23. (本小题 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x+1| + |2x-1|$.

- (1) 解不等式 $f(x) \leq x+2$;
- (2) 若 $g(x) = |3x-2m| + |3x-1|$, 对 $\forall x_1 \in \mathbf{R}, \exists x_2 \in \mathbf{R}$, 使 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国强基计划、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国中学大联考 2020 届高三下学期模考试题及答案汇总（更新下载中），点击链接获得

<http://www.zizzs.com/c/202002/42364.html>