

高三数学

(考试时间:120分钟 试卷满分:150分)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

题
答
要
不
内
线
封
密

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是合
题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | \log_2 x \leq 2\}$, $B = \{x | 2x \geq 6\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{x | 3 \leq x \leq 4\}$ B. $\{x | 0 < x \leq 3\}$ C. $\{x | x > 0\}$ D. $\{x | 1 \leq x \leq 3\}$
2. 复数 z 满足 $iz = 1 - 3i$, 则 z 的实部是
A. -1 B. 1 C. -3 D. 3
3. 已知 $f(x) = (x-2)(x+a)$ 是偶函数, 则 $a =$
A. -1 B. 1 C. -2 D. 2
4. 若双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 其中一条渐近线的斜率为 2, 且点 $(\sqrt{3}, 2)$ 在 C 上, 则的
标准方程为
A. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$ B. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 1$ C. $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ D. $\frac{5x^2}{3} - y^2 = 1$
5. 有甲、乙两个物体同时从 A 地沿着一条固定路线运动, 甲物体的运动路程 s_1 (千米) 与时间 t (时) 的关系为 $s_1(t) = 2^t - 1$, 乙物体运动的路程 s_2 (千米) 与时间 t (时) 的关系为 $s_2(t) = 3^t$ 当甲、乙再次相遇时, 所用的时间 t (时) 属于区间
A. (2, 3) B. (3, 4) C. (4, 5) D. (5, 6)
6. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $b \cos A = a(\sqrt{3} - \cos B)$, $a = 2$, 则 $c =$
A. 4 B. 6 C. $2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{3}$
7. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足对任意的实数 x, y , 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 则
 $f(\ln 2023) + f(\ln \frac{1}{2023}) =$
A. 2023 B. -2023 C. 0 D. 1
8. 欧拉是 18 世纪最优秀的数学家之一, 几乎每个数学领域都可以看到欧拉的名字, 例如初几
何中的欧拉线、多面体中的欧拉定理、微分方程中的欧拉方程, 以及数论中的欧拉函数等。
欧拉函数是指: 对于一个正整数 n , 小于或等于 n 的正整数中与 n 互质(把公因数只有 1 的
两个数叫互质数)的正整数(包括 1)的个数, 记作 $\varphi(n)$ 。例如: 小于或等于 4 的正整数中与
互质的正整数有 1, 3 这两个, 即 $\varphi(4) = 2$ 。记 S_n 为数列 $\{\varphi(6^n)\}$ 的前 n 项和, 则 $S_{12} =$
A. $\frac{2}{5}(3^{12} + 2^{12})$ B. $\frac{2}{5}(6^{12} - 1)$
C. $\frac{1}{2}(3^{12} + 1)$ D. $\frac{1}{2}(3^{12} - 1)$

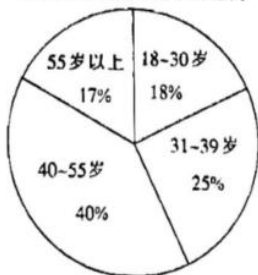
二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分。

9. 已知直线 $l_1: y=kx+1$, $l_2: y=mx+2$, 圆 $C: (x-1)^2+(y-2)^2=6$, 下列说法正确的是

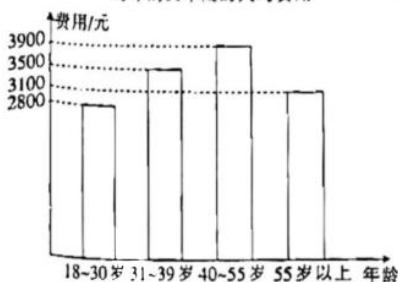
- A. 若 l_1 经过圆心 C , 则 $k=1$
- B. 直线 l_2 与圆 C 相离
- C. 若 $l_1 \parallel l_2$, 且它们之间的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $k=\pm 2$
- D. 若 $k=-1$, l_1 与圆 C 相交于 M, N , 则 $|MN|=2$

10. 某统计机构对 1000 名拥有汽车的人进行了调查, 对得到的数据整理并制作了如图所示的统计图表, 下列关于样本的说法错误的是

拥有汽车的人群的年龄比例

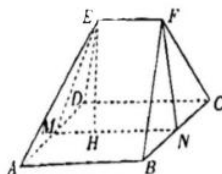


每年购买车险的人均费用



- A. 30 岁以上人群拥有汽车的人数为 720
- B. 40~45 岁之间的人群拥有汽车的人数最多
- C. 55 岁以上人群每年购买车险的总费用最少
- D. 40~55 岁之间的人群每年购买车险的总费用, 比 18~30 岁和 55 岁以上人群购买车险的总费用之和还要多 无界学习公众号

11. 故宫太和殿是中国形制最高的宫殿, 其建筑采用了重檐庑殿顶的屋顶样式, 庑殿顶是“四出水”的五脊四坡式, 由一条正脊和四条垂脊组成, 因此又称五脊殿。由于屋顶有四面斜坡, 故又称四阿顶。如图, 某几何体 $ABCDEF$ 有五个面, 其形状与四阿顶相类似。已知底面 $ABCD$ 为矩形, $AB=2AD=2EF=12$, $EF \parallel AB$, 且 $EA=ED=FB=FC$, M, N 分别为 AD, BC 的中点, EM 与底面 $ABCD$ 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$, 过点 E 作 $EH \perp MN$, 垂足为 H 。下列说法正确的有



- A. $AD \perp$ 平面 $EFNM$
- B. $EH=2\sqrt{3}$
- C. 异面直线 EM 与 BF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- D. 点 H 到平面 $ABFE$ 的距离为 $3\sqrt{3}$

12. 已知点 $P(1, a)$ ($a > 1$) 在抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上, 过 P 作圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 的两条切线, 分别交 C 于 A, B 两点, 且直线 AB 的斜率为 -1 , 若 F 为 C 的焦点, $M(x, y)$ 为 C 上的动点, N 是 C 的准线与坐标轴的交点, 则

A. $p=1$

B. $p=2$

C. $\frac{|MN|}{|MF|}$ 的最大值是 $\sqrt{2}$

D. $\frac{|MN|}{|MF|}$ 的最大值是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知单位向量 a, b 满足 $a \cdot (a+4b) = -1$, 则向量 a 与 b 的夹角为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 过点 $(0, 18)$ 作曲线 $y = x^3 - x + 2$ 的切线, 则切点的横坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 这条切线在 x 轴上的截距为 $\underline{\hspace{2cm}}$. (本题第一空 3 分, 第二空 2 分)

15. 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 已知 $AB=AC=4, AA_1=2, \angle BAC=90^\circ$, 则该三棱柱外接球的表面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 现安排 A, B, C, D, E 这 5 名同学参加校园文化艺术节, 校园文化艺术节包含书法、唱歌、绘画、剪纸四个项目, 每个项目至少有一人参加, 每人只能参加一个项目, A 不会剪纸但能胜任其他三个项目, 剩下的人都能胜任这四个项目, 则不同的安排方案有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 种.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_2=7, S_5=45$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 若 $T_m = \frac{2}{25}$, 求 m 的值.

18. (12 分)

已知函数 $f(x) = \sin^2 x + \sin x \cos x - 1$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期和单调递增区间;

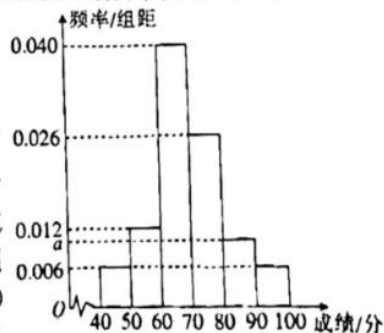
(2) 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, 求 $f(x)$ 的最大值, 并求当 $f(x)$ 取得最大值时 x 的值.

19. (12 分)

为了让学生了解毒品的危害, 加强禁毒教育, 某校组织了全体学生参加禁毒知识竞赛, 现随机抽取 50 名学生的成绩 (满分 100 分) 进行分析, 把他们的成绩分成以下 6 组: $[40, 50), [50, 60), [60, 70), [70, 80), [80, 90), [90, 100]$. 整理得到如图所示的频率分布直方图.

(1) 求图中 a 的值并估计全校学生的平均成绩 μ . (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表)

(2) 在 (1) 的条件下, 若此次知识竞赛得分 $X \sim N(\mu, 12^2)$, 为了激发学生学习禁毒知识的兴趣, 对参赛学生制定如下奖励方案: 得分不超过 57 分的不予奖励, 得分超过 57 分但不超过 81 分的可获得学校食堂消费券 5 元, 得分超过 81 分但不超过 93 分的可获得学校食堂消费券 10 元, 超过 93 分可获得学校食堂消费券 15 元. 试估计全校 1000 名学生参加知识竞赛共可获得食堂消费券多少元. (结果



四舍五入保留整数)

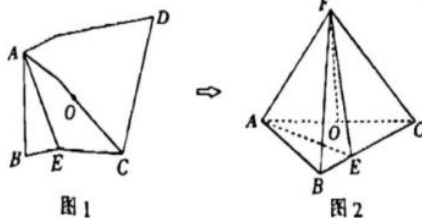
参考数据: $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$, $P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$.

(12分)

在图1中, $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 2\sqrt{2}$, $\triangle ACD$ 为等边三角形, O 为 AC 边的中点, E 在 BC 边上, 且 $EC = 2BE$, 沿 AC 将 $\triangle ACD$ 进行折叠, 使点 D 运动到点 F 的位置, 如图2, 连接 FO, FB, FE , 使得 $FB = 4$.

(1) 证明: $FO \perp$ 平面 ABC .

(2) 求二面角 $E-FA-C$ 的余弦值.



(12分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线 l 与 E 交于 A, B 两点, $\triangle ABF_2$ 的周长为 8, 且点 $(-1, \frac{3}{2})$ 在 E 上.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 设直线 l 与圆 $O: x^2 + y^2 = a^2$ 交于 C, D 两点, 当 $|CD| \in [2\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{33}}{3}]$ 时, 求 $\triangle ABF_2$ 面积的取值范围. 无界学习公众号

(12分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 - ax, a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $a = 0$, 求 $f(x)$ 的最小值;

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 证明: $f(x_1) + f(x_2) > -\frac{1}{4}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

