数学试题参考答案

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算。每小题 4 分，共 40 分。

1. A　**2.** C　**3.** B　**4.** A　**5.** B　**6.** D　**7.** A　**8.** C　**9.** C　**10.** D

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算。多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。

11. 1480　**12.** $[0,+\infty)$，$(-1,0)$　**13.** -18，71　**14.** $\dfrac{7\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{3}$

15. $\dfrac{\pi}{4}$　**16.** $\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{23}{16}$　**17.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。

18. 本题主要考查三角函数及其变换、正弦定理、余弦定理等基础知识，同时考查数学运算等素养。满分 14 分。

（Ⅰ）由余弦定理得　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

代入并化简得　$c=2b\cos A+2b\cos B$，

由正弦定理得　$\sin C=2\cos A\sin B+\sin 2B$，

由 $A+B+C=\pi$ 得　$\sin C=\sin(A+B)$，

代入并化简得　$\sin(A-B)=\sin 2B$．

（Ⅱ）由 $A+B+C=\pi$ 得　$A\in(0,\pi-B)$，

当 B 是锐角时，　$A=3B$，

解得　$B\in(0,\dfrac{\pi}{4})$；

当 B 是直角时，　不合题意；

当 B 是钝角时，　$A=3B-2\pi$，

解得　$B\in(\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{3\pi}{4})$．

故角 B 的取值范围是　$(0,\dfrac{\pi}{4})\cup(\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{3\pi}{4})$．

19. 本题主要考查空间点、线、面位置关系，直线与平面所成的角等基础知识，同时考查直观想象和数学运算等素养。满分 15 分。

（Ⅰ）取 AD，AP 中点 E，F，连接 BE，BF，EF．

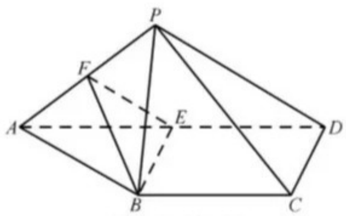
由 $AB=PB$，$PA\perp PD$ 得　$PA\perp BF$，$PA\perp EF$，

所以　$PA\perp$ 平面 BEF．

由 $AD\parallel BC$，$AD=2BC$ 知四边形 $BCDE$ 是平行四边形，则　$BE\parallel CD$．

由 $BE\parallel CD$，$EF\parallel PD$ 得　平面 $BEF\parallel$ 平面 PCD，

所以　$PA\perp$ 平面 PCD．



(第 19 题图)

（Ⅱ）方法一：

由 $AB=PB=BC=CD=1$，$AD=2$ 知四边形 $ABCD$ 是以 $\angle A=60^\circ$ 的等腰梯形．

连接 AC，则 $AC\perp CD$，$CD\perp$ 平面 PAC，于是点 P 在底面 $ABCD$ 内的射影在 AC 上．

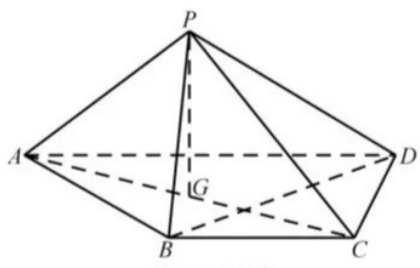
取 AC 中点 G，则 $PG=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，于是当 $PG\perp$ 底面 $ABCD$ 时，四棱锥 $P-ABCD$ 的体积最大．

连接 BD，则　$V_{P-ABD}=\dfrac{1}{3}S_{ABD}h_1=\dfrac{1}{4}$．

计算得 $PA=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$PD=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，则 $S_{PAD}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，故

$V_{B-PAD}=\dfrac{1}{3}S_{PAD}h_2=\dfrac{1}{4}$，

解得 $h_2=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，则　$\sin\theta=\dfrac{h_2}{|PB|}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$．



(第 19 题图)

因此，直线 PB 与平面 PAD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$．

（Ⅱ）方法二：

由 $AB=PB=BC=CD=1$，$AD=2$ 知四边形 $ABCD$ 是以 $\angle A=60^\circ$ 的等腰梯形．

连接 AC，则 $AC\perp CD$，$CD\perp$ 平面 PAC，于是点 P 在底面 $ABCD$ 内的射影在 AC 上．

取 AC 中点 G，则 $PG=\frac{\sqrt{3}}{2}$，于是当 $PG\perp$ 底面 $ABCD$ 时，四棱锥 $P-ABCD$ 的体积最大.

如图，以 G 为原点，分别以射线 GB,GC,GP 为 x,y,z 轴的正半轴，建立空间直角坐标系 $G-xyz$.

由题意得

$$G(0,0,0),\ A(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},0),\ B(\frac{1}{2},0,0),\ D(-1,\frac{\sqrt{3}}{2},0),\ P(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

所以 $\overrightarrow{PA}=(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{PB}=(\frac{1}{2},0,-\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{AD}=(-1,\sqrt{3},0)$.

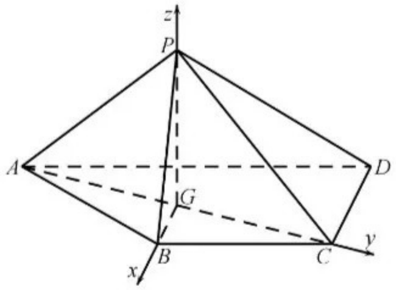
设平面 PAD 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$，

得 $\begin{cases}-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ -x+\sqrt{3}y=0\end{cases}$，

取 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,-1)$，

则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{PB},\boldsymbol{n}>|=\frac{|\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PB}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.



(第 19 题图)

因此，直线 PB 与平面 PAD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

20. 本题主要考查等差数列、等比数列等基础知识，同时考查数学运算和逻辑推理等素养。满分 15 分。

(Ⅰ) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q\neq0)$，数列 $\{b_n\}$ 的公差为 $d(d>0)$.

由于 $\frac{a_{b_{n+1}}}{a_{b_n}}=q^{b_{n+1}-b_n}=q^d$，

故数列 $\{a_{b_n}\}$ 是首项为 a_{b_1}，公比为 q^d 的等比数列.

易知 $q\neq1$，则

$$a_1+a_2+\cdots+a_{2n}=\frac{1-q^{2n}}{1-q}=3[\frac{1-(q^d)^n}{1-q^d}]=3(a_{b_1}+a_{b_2}+\cdots+a_{b_n}),$$

解得 $q=d=2$，

因此 $a_n=2^{n-1}$，$b_n=2n-1$.

(Ⅱ) 由 $b_n=2n-1$ 得 $S_n=n^2$，

所以 $c_n=2^{n-1}-n^2$.

由于 $c_{n+1}-c_n=2^{n-1}-2n-1$，

则 $c_2-c_1,c_3-c_2,c_4-c_3,c_5-c_4<0$，

且当 $n\geq5$ 时，$2^{n-1}-2n-1=4\times(1+1)^{n-3}-2n-1>2n-9>0$，

故当 $n=1,2,3,4$ 时，$c_{n+1}<c_n$；当 $n\geq5$ 时，$c_{n+1}>c_n$.

因此数列 $\{c_n\}$ 中的最小项是 $c_5=-9$.

21. 本题主要考查抛物线的几何性质，直线与抛物线、圆的位置关系等基础知识，同时考查数学抽象、数学运算与逻辑推理等素养。满分 15 分。

(Ⅰ) 由题意知抛物线的准线方程是 $x=-1$.

(Ⅱ) 由题意可设直线 $AB:x=my-n(m,n>0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

将直线 AB 的方程代入抛物线 $y^2=4x$ 得

$$y^2-4my+4n=0,$$

所以 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=4n$，

点 C 的坐标 (x_3,y_3) 满足

$$y_3=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=2m,\quad x_3=my_3-n=2m^2-n .$$

由 $|AB|=2|CN|$ 得

$$\sqrt{m^2+1}\,|y_1-y_2|=\sqrt{m^2+1}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=y_1+y_2,$$

代入并化简得 $m^4-m^2n-n=0$.

又 $M(-n,0)$, $N(2m^2-n,0)$, 由勾股定理得

$$|PQ|=2\sqrt{(2m)^2-(2m^2-n)^2}=\frac{2}{m}\sqrt{4n-m^2n^2},$$

则 $|MN|\cdot|PQ|=4m\sqrt{4n-m^2n^2}=4\sqrt{4-(2-m^2n)^2}\le 8$,

当且仅当 $m^2n=2$, 即 $m^6-2m^2-2=0$ 时等号成立.

由于 $m^2-n>0$,

解得 $m>\sqrt[4]{2}$.

记 $f(m)=m^6-2m^2-2$, $m>\sqrt[4]{2}$, 注意到

$$f(\sqrt[4]{2})\cdot f(2)<0,$$

则存在 $m\in(\sqrt[4]{2},2)$ 符合题意.

因此, $|MN|\cdot|PQ|$ 的最大值是 8.

22. 本题主要考查函数的单调性，导数的运算及其应用，同时考查数学抽象、数学运算与逻辑推理等素养。满分 15 分。

（Ⅰ）当 $a=0$, $b=-1$ 时, $f(x)=\ln^2x+2ex$,

则 $f'(x)=\dfrac{2}{x}(\ln x+ex)$.

设 $g(x)=\ln x+ex$,

易知 $g(x)$ 单调递增, 且 $g(\frac{1}{e})=0$, 则

x	$(0,\frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	极小值 $f(\frac{1}{e})$	单调递增

所以 $f(x)\ge f(\frac{1}{e})=3$.

（Ⅱ）（ⅰ）由于 $f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}+2ax+b$,

设 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}+ax$, $h'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}+a$, 则 $h'(x)$ 有两个变号零点 $x_1,x_2\,(x_1<x_2)$.

记 $h''(x)=[h'(x)]'$, 则 $h''(x)=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$,

所以

x	$(0,e^{\frac{3}{2}})$	$e^{\frac{3}{2}}$	$(e^{\frac{3}{2}},+\infty)$
$h''(x)$	$-$	0	$+$
$h'(x)$	单调递减	极小值 $h'(e^{\frac{3}{2}})$	单调递增

因此 $x_1\in(e,e^{\frac{3}{2}})$, $x_2\in(e^{\frac{3}{2}},+\infty)$.

此时

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	单调递增	极大值 $h(x_1)$	单调递减	极小值 $h(x_2)$	单调递增

将 $\dfrac{\ln x_1-1}{x_1^2}=\dfrac{\ln x_2-1}{x_2^2}=a$ 代入 $h(x_1)$, $h(x_2)$ 得

$$h(x_1)=\frac{2\ln x_1-1}{x_1},\ h(x_1)=\frac{2\ln x_2-1}{x_2}.$$

设 $\varphi(x)=\dfrac{2\ln x-1}{x}$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{3-2\ln x}{x^2}$，

所以

x	$(0,e^{\frac{3}{2}})$	$e^{\frac{3}{2}}$	$(e^{\frac{3}{2}},+\infty)$
$\varphi'(x)$	+	0	−
$\varphi(x)$	单调递增	极大值 $\varphi(e^{\frac{3}{2}})$	单调递减

由 $b\in(-2h(x_1),-2h(x_2))$ 解得

$$b\in(-4e^{-\frac{3}{2}},0).$$

（ⅱ）由题意得 $f'(s)=0$，即 $\dfrac{2\ln s}{s}+2as+b=0$，

将 $\dfrac{2\ln s}{s}+2as+b=0$ 代入 $f(s)$ 得

$$f(s)=\ln^2 s-2\ln s-as^2.$$

设 $p(x)=\ln^2 x-2\ln x-ax^2$，则

$$p'(x)=\frac{2}{x}(\ln x-1-ax^2).$$

设 $q(x)=\ln x-1-ax^2$，则 $q'(x)=\dfrac{1-2ax^2}{x}$，

结合 $p'(x_1)=p'(x_2)=0$ 及 $a>0$ 得

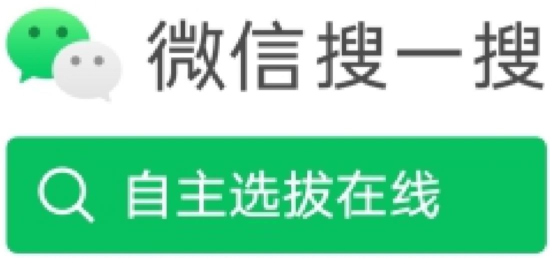
$$p'(x)>0(x_1<x<x_2).$$

又 $x_1<s<x_2$，故 $p(s)>p(x_1)=\ln^2 x_1-3\ln x_1+1>-\dfrac{5}{4}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》