巴蜀中学2023届高考适应性月考卷（七）
数学参考答案

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	B	A	C	B	A	C

【解析】

1．$M=\{x\mid x>2\}$，$N=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$，所以$M\cap N=\{x\mid 2<x\leqslant 3\}$，故选D.

2．$\left(\dfrac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{i}-1}\right)^{2023}=\left[\dfrac{(\mathrm{i}+1)^2}{(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}+1)}\right]^{2023}=\left(\dfrac{\mathrm{i}^2+2\mathrm{i}+1}{\mathrm{i}^2-1}\right)^{2023}=\left(\dfrac{2\mathrm{i}}{-2}\right)^{2023}=(-\mathrm{i})^{2023}=\mathrm{i}$，故选C.

3．先将函数$f(x)=\sin x$的图象向左平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位，得到$y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，再把图象上每个点的横坐标缩小为原来的$\dfrac{1}{2}$，得到$g(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，故选B.

4．作BC_1的平行线B_1D，使得$BC_1=B_1D$，所以直线AB_1与直线BC_1夹角为直线AB_1与直线B_1D的夹角．在$\triangle AB_1D$中，$AB_1=B_1D=\sqrt{2},\ AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{5}$，由余弦定理得$\cos\angle AB_1D=\dfrac{AB_1^2+B_1D^2-AD^2}{2AB_1\cdot B_1D}=\dfrac{2+2-5}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{4}$，所以直线$AB_1$与直线$BC_1$夹角的余弦值为$\dfrac{1}{4}$，故选A.

5．如图1，连接CH，作$AM\perp CH$于点M，作$BN\perp CH$于点N，由正八边形的特征可得$AB/\!/CH$，$\angle AHC=\angle BCH=45^\circ$，故$MH=NC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB$，所以$CH=(1+\sqrt{2})AB$，则$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{AH}+(1+\sqrt{2})\overrightarrow{AB}$，又因$\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AH}(x,\ y\in\mathbf{R})$，所以$y=1,\ x=1+\sqrt{2}$，所以$x+y=2+\sqrt{2}$，故选C.

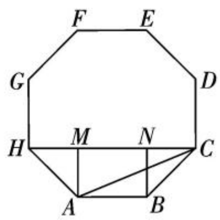

图1

6．$(x-3y)^2(x+y)^5=x^2(x+y)^5-6xy(x+y)^5+9y^2(x+y)^5$，$(x+y)^5$的展开式的通项是$T_{r+1}=\mathrm{C}_5^r x^{5-r}y^r$，令$r=4$，则$(x+y)^5$的展开式中$xy^4$的系数为$\mathrm{C}_5^4=5$，令$r=3$，则$(x+y)^5$的展开式中$x^2y^3$的系数为$\mathrm{C}_5^3=10$，令$r=2$，则$(x+y)^5$的展开式中$x^3y^2$的系数为$\mathrm{C}_5^2=10$，故$(x-3y)^2(x+y)^5$的展开式中，$x^3y^4$的系数是$5-6\times10+9\times10=35$，故选B.

7．设 $F_1(-c,\ 0)$，$F_2(c,\ 0)$，其中 $c^2=a^2+b^2$．设 $O_1(x_1,\ y_1)$，$O_2(x_2,\ y_2)$．如图 2，过 O_1 分别作 PF_1，PF_2，F_1F_2 的垂线，垂足分别为 R，S，T，所以由切线长定理有 $|PR|=|PS|,|F_1R|=|F_1T|,|F_2S|=|F_2T|$，则 $|PF_1|-|PF_2|=|PR|+|RF_1|-(|PS|+|SF_2|)=|RF_1|-|SF_2|=|F_1T|-|TF_2|=2a$，又因为 $|F_1F_2|=|TF_1|+|TF_2|=2c$，所以 $|TF_1|=a+c$．又 $F_1(-c,\ 0)$，所以 $x_{O_1}=a$，同理可得 $x_{O_2}=a$. 则 O_1，O_2 在直线 $x=a$ 上，又因为 F_2O_1 平分 $\angle TF_2P$，F_2O_2 平分 $\angle TF_2Q$，$\angle PF_2Q=\pi$，则 $\angle O_1F_2O_2=\dfrac{\pi}{2}$．在 $\triangle O_1O_2F_2$ 中，$\angle O_1F_2O_2=\dfrac{\pi}{2}$，$F_2T=c-a$．由射影定理可得 $|O_1T|\bullet|O_2T|=|F_2T|^2$，即 $a^2=(c-a)^2\Rightarrow c=2a$，则双曲线离心率为 2，故选 A.

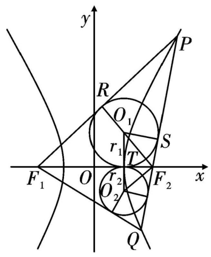

图 2

8．令 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，其中 F 为 AB 的中点，$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$，则 $-4=(\vec{a}-\vec{c})\bullet(\vec{b}-\vec{c})\ =\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}=\dfrac{\overrightarrow{CE}^2-\overrightarrow{AB}^2}{4}$，以 O 为圆心，2 为半径作圆，O 为原点，$\overrightarrow{OC}$ 为 x 轴的正方向建立直角坐标系，如图 3 所示．又因为 $2(\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2)=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})^2+(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})^2=(2\overrightarrow{OF})^2+\overrightarrow{AB}^2$ ①，$2(\overrightarrow{OC}^2+\overrightarrow{OE}^2)=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE})^2+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OE})^2=(2\overrightarrow{OF})^2+\overrightarrow{CE}^2$ ②，① − ② 得 $(\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2)-(\overrightarrow{OC}^2+\overrightarrow{OE}^2)=\dfrac{\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{CE}^2}{2}=8$，所以 $|\overrightarrow{OE}|=2$，这样点 E 也在圆 O 上，所以 $|\vec{a}-\vec{b}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\overrightarrow{CE}^2+16}$，又因为 $|\overrightarrow{CE}|\in[|\overrightarrow{OE}|-|\overrightarrow{OC}|,\ |\overrightarrow{OE}|+|\overrightarrow{OC}|]$，所以 $|\overrightarrow{CE}|\in[1,\ 3]$，所以 $|\vec{a}-\vec{b}|=|\overrightarrow{AB}|\in[\sqrt{17},\ 5]$，故选 C.

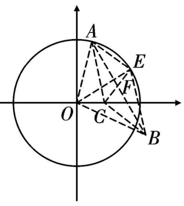

图 3

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

题号	9	10	11	12
答案	BC	ABD	AB	BD

【解析】

9．由复合函数的单调性可知 $f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递减，故 B 正确；$f(x)$ 为偶函数，所以关于直线 $x=0$ 对称，故 C 正确，故选 BC.

10．选项 A：$A_7^5=2520$，故 A 正确；B 选项：为不同物体的分组问题：分为：2 组 2 个，3 组 1 个；1 组 3 个，4 组 1 个，即 $7=2+2+1+1+1$，$7=3+1+1+1+1$，所以有 $\dfrac{C_7^2C_5^2}{A_2^2}+C_7^3=140$ 种，故 B 正确；选项 C：用隔板法求解，C 选项等价于 8 个相同的球，放入 3 个不同的盒子里，每个盒子至少放 1 个，所以有 $C_7^2=21$ 种，故 C 错误；选项 D：由于球与盒子都相同，所以存放的区别在于盒子里球的个数，①存放 1 个盒子：将 7 个球放入 1 个盒子，有 1 种存放方式；②存放 2 个盒子：$7=1+6=2+5=3+4$ 有 3 种；③存放 3 个盒子：$7=1+1+5=1+2+4=1+3+3=3+2+2$ 有 4 种；共 8 种，故 D 正确，故选 ABD.

11．由 $x^2\geqslant a\ln x+x$，令 $F(x)=x^2-a\ln x-x$，所以 $F'(x)=2x-\dfrac{a}{x}-1=\dfrac{2x^2-x-a}{x}$，令 $h(x)=2x^2-x-a$，易知 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)\uparrow$，所以 $h(x)>h(1)=1-a$，①当 $1-a\geqslant 0$，即 $0<a\leqslant 1$ 时，$h(x)>0$，$F'(x)>0$，$F(x)\uparrow$，所以 $F(x)>F(1)=0$．②当 $1-a<0$，即 $a>1$ 时，存在 $x_0\in(1,+\infty)$，使得 $h(x_0)=0$，即 $2x_0{}^2-x_0-a=0$．当 $x\in(1,x_0)$ 时，$h(x)<0$，$F'(x)<0$，$F(x)\downarrow$，所以 $F(x_0)<F(1)=0$ 与 $F(x)\geqslant 0$ 矛盾．综上，$a\in(0,1]$，故 A 正确；如图 4：由 $f(x)\leqslant bx+c\leqslant x^2$，得 $f(x)=a\ln x+x$ 与 $g(x)=x^2$ 在 $(1,+\infty)$ 上存在分隔直线，$f(x)$，$g(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程分别为：$y=(a+1)x-a$，$y=2x-1$，所以 $a+1\leqslant b\leqslant 2$，得 $b\in(1,2]$，故 B 正确；取 $x=1$ 得 $f(1)=1^2\leqslant b+c\leqslant g(1)=1$，所以 $b+c=1$，得 $c=1-b\in[-1,0)$，故 C，D 错误，故选 AB.

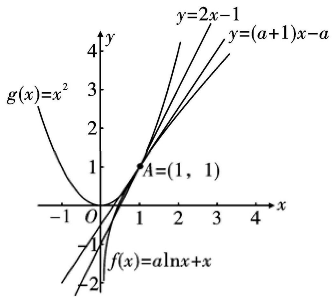

图 4

12．选项 A：平面最多和正方体的六个面都相交，所以最多 6 条交线，所以形成的多边形最多为六边形，所以截面图形一定不是七边形，故 A 错误；选项 B：如图 5，设 $AD=x$，$BD=y$，$CD=z$，由勾股定理得：

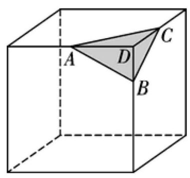

图 5

$$\begin{cases}AB^2=x^2+y^2,\\BC^2=y^2+z^2,\\AC^2=x^2+z^2,\end{cases}\quad \text{所以}\ \cos A=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AC\cdot AB}=\frac{2x^2}{2AC\cdot AB}>0,$$

$$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{2y^2}{2AB\cdot BC}>0,\quad \cos C=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\frac{2z^2}{2AC\cdot BC}>0,$$ 所

以角 A，B，C 均为锐角，所以 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，故 B 正确；

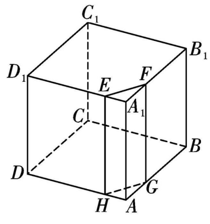

图 6

选项 C：正方体 3 组对面相互平行，由面面平行的性质定理可知：五边形中有两组对边平行，所以截面五边形不可能为正五边形，故 C 错误；选项 D：如图 6，截面 $EHGF$ 分别交棱 AB，AD 于点 G，H，假设四边形 $EHGF$ 为直角梯形（$EF /\!/ GH$），则 $EH \perp HG$，又因为 $AA_1 \perp HG$ 且 AA_1，EH 共面，所以 $AA_1 /\!/ EH$ 或 $AA_1 \cap EH = P$，当 $AA_1 /\!/ EH$ 时，由线面平行的性质定理得 $EH /\!/ FG$，又因为 $EF /\!/ GH$，所以四边形 $EHGF$ 为平行四边形，与假设矛盾；当 $AA_1 \cap EH = P$ 时，因为 $HG \perp AA_1$，$HG \perp EH$ 且 $AA_1 \cap EH = P$，所以 $HG \perp 平面APH$，即 $HG \perp 平面AA_1D_1D$，又因为 $AB \perp 平面AA_1D_1D$，所以 $AB /\!/ GH$，与 $AB \cap GH = G$ 矛盾，所以假设不成立，故 D 正确，故选 BD.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	21.6	$\frac{2}{5}$	$y=\frac{\sqrt{15}}{15}x+\frac{4\sqrt{15}}{15}$ 或 $y=-\frac{\sqrt{15}}{15}x-\frac{4\sqrt{15}}{15}$ 或 $y=\frac{3\sqrt{7}}{7}x-\frac{4\sqrt{7}}{7}$ 或 $y=-\frac{3\sqrt{7}}{7}x+\frac{4\sqrt{7}}{7}$（写出其中一个即可得满分）	$a_n=\begin{cases}3^{\frac{n+3}{2}}-4\,(n为奇数)\\3^{\frac{n+2}{2}}-2(n为偶数)\end{cases}$；$2\times3^{1013}-6079$

【解析】

13．因为 $X \sim B(10,\ 0.6)$，所以 $D(X)=np(1-p)=2.4$，所以 $D(3X+9)=3^2D(X)=9\times2.4=21.6$．

14．$y=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x^2+5}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}}\leqslant\dfrac{2}{5}$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立，所以函数的最大值为 $\dfrac{2}{5}$.

15．由题可知：两圆外离，所以两圆有 4 条公切线，设切线与两圆圆心连线的交点为 $A(x_0,\ y_0)$．

①当切线为外公切线时：$\dfrac{AO_1}{AO_2}=\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{1}{2}$，$\overrightarrow{AO_1}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AO_2}$，所以 $(-x_0,\ -y_0)=\dfrac{1}{2}(4-x_0,\ -y_0)$，

得 $\begin{cases}x_0=-4,\\y_0=0,\end{cases}$ 所以 $A(-4,\ 0)$，设公切线 l：$y=k(x+4)$，所以圆心 O_1 到切线 l 的距离

$d=\dfrac{|4k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{15}$，所以公切线为 $y=\dfrac{\sqrt{15}}{15}x+\dfrac{4\sqrt{15}}{15}$ 或 $y=-\dfrac{\sqrt{15}}{15}x-\dfrac{4\sqrt{15}}{15}$；

②当切线为内公切线时：$\dfrac{AO_1}{AO_2}=\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{1}{2}$，$\overrightarrow{O_1A}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{O_1O_2}$，所以 $(x_0,\ y_0)=\dfrac{1}{3}(4,\ 0)$，所以

$A\left(\dfrac{4}{3},\ 0\right)$，设公切线 l：$y=k\left(x-\dfrac{4}{3}\right)$，所以圆心 O_1 到切线 l 的距离 $d=\dfrac{\left|\dfrac{4}{3}k\right|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得

$k=\pm\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$，所以公切线为 $y=\dfrac{3\sqrt{7}}{7}x-\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$ 或 $y=-\dfrac{3\sqrt{7}}{7}x+\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$.

16. 当 n 为奇数时，$a_{n+1}=a_n+2$，令 $n=2k-1\ (k\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_{2k}=a_{2k-1}+2$；当 n 为偶数时，$a_{n+1}=3a_n+2$，令 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_{2k+1}=3a_{2k}+2$．所以 $a_{2k+1}=3a_{2k}+2=3(a_{2k-1}+2)+2=3a_{2k-1}+8$，则 $a_{2k+1}+4=3(a_{2k-1}+4)(k\in\mathbf{N}^*)$，当 $k=1$ 时，$a_1+4=9$，所以 $\{a_{2k-1}+4\}$ 是以 9 为首项，3 为公比的等比数列，所以 $a_{2k-1}+4=9\bullet 3^{k-1}=3^{k+1}$，$\therefore a_{2k-1}=3^{k+1}-4$，则 $a_{2k}=a_{2k-1}+2=3^{k+1}-2$．当 n 为奇数时，由 $n=2k-1$，则 $k=\dfrac{n+1}{2}$，所以 $a_n=3^{\frac{n+1}{2}+1}-4=3^{\frac{n+3}{2}}-4$；当 n 为偶数时，由 $n=2k$，则 $k=\dfrac{n}{2}$，所以 $a_n=3^{\frac{n}{2}+1}-2=3^{\frac{n+2}{2}}-2$，

所以 $a_n=\begin{cases}3^{\frac{n+3}{2}}-4(n\text{为奇数}),\\ 3^{\frac{n+2}{2}}-2(n\text{为偶数}).\end{cases}$ $S_{2023}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2023})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2022})=(3^2+3^3+\cdots+3^{1013}-4\times 1012)+(3^2+3^3+\cdots+3^{1012}-2\times 1011)=\left(\dfrac{3^2\times(1-3^{1012})}{1-3}-4\times 1012\right)+\left(\dfrac{3^2\times(1-3^{1011})}{1-3}-2\times 1011\right)=2\times 3^{1013}-6079$.

四、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分10分）

（1）证明：依题 $\cos C\neq 0$，否则 $\cos C=0\Rightarrow\sin C=1\Rightarrow 3\sin C+4\cos C\neq 5$，矛盾.

由 $3\sin C+4\cos C=5$ 得：$9\sin^2 C=(5-4\cos C)^2$，

故 $9\sin^2 C+9\cos^2 C=9\cos^2 C+(5-4\cos C)^2=9$,

整理得$(5\cos C-4)^2=0$，从而$\cos C=\frac{4}{5}$，$\sin C=\frac{3}{5}$，

从而$\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{3}{4}$. ……………………………………………………………（5分）

（2）解：由$a^2+b^2=1$，由（1）可得$\cos C=\frac{4}{5}$，

故C为锐角，$a^2+b^2=1>c^2$，

故$\cos C=\frac{4}{5}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1-c^2}{2ab}\geqslant\frac{1-c^2}{a^2+b^2}=1-c^2$，

从而$c^2\geqslant\frac{1}{5}\Rightarrow c\geqslant\frac{\sqrt{5}}{5}$，当且仅当$a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等.

……………………………………………………（10分）（没有取等扣1分）

18．（本小题满分12分）

（1）证明：依题$\Delta=(a_{n-1}-a_n+a_n-a_{n+1})^2-4(a_{n-1}-a_n)(a_n-a_{n+1})=0$，

从而$[x-(a_{n-1}-a_n)][x-(a_n-a_{n+1})]=0$有两个相等的实根，

从而$(a_{n-1}-a_n)=(a_n-a_{n+1})$，也即数列$\{a_n\}$成等差数列. ………………………（6分）

（2）解：依题$S_5=5a_3=-10\Rightarrow a_3=-2$，$d=\frac{1}{5}(a_8-a_3)=2$，

$\therefore a_n=a_3+(n-3)d=2n-8$， ……………………………………………（9分）

由于数列单调递增且当$n\leqslant4$时$a_n\leqslant0$，

因此数列$\{a_n\}$的前n项和S_n的最小值为$S_4=S_3=-12$. ………………………（12分）

19．（本小题满分12分）

（1）证明：依题意$QS\perp PN$，又$PQ\perp PN$，$QS\cap PQ=Q$，故$PN\perp$平面APQ.

又$PN\subseteq$平面$MNPQ$，故平面$APQ\perp$平面$MNPQ$. ………………………………（5分）

（2）解：取PQ的中点为O，MN的中点为E，则$AO\perp PQ$，

又平面$APQ\perp$平面$MNPQ$且PQ为交线，则$AO\perp$平面$MNPQ$.

分别以 OE，OP，OA 为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，

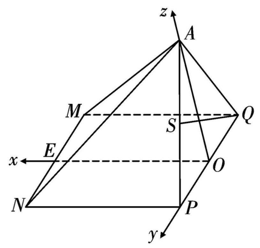

图 7

如图7所示：设 $MN=PQ=2a$，

则平面 $MNPQ$ 的法向量为 $\vec{m}=(0,\ 0,\ 1)$.

又 $A(0,\ 0,\ \sqrt{3}a)$，$M(2a,\ -a,\ 0)$，$N(2a,\ a,\ 0)$，

则 $\overrightarrow{MA}=(-2a,\ a,\ \sqrt{3}a)$，$\overrightarrow{MN}=(0,\ 2a,\ 0)$，

设平面 AMN 的法向量为 $\vec{n}=(x,\ y,\ z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{MA}=(-2x_1+y_1+\sqrt{3}z_1)\cdot a=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{MN}=2a\cdot y_1=0,\end{cases}$

故平面 AMN 的法向量可取为 $\vec{n}=(\sqrt{3},\ 0,\ 2)$.

平面 AMN 与平面 $MNPQ$ 所成二面角 θ 的余弦值满足 $|\cos\theta|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$,

故 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. ……………………………………………………………（12 分）

20．（本小题满分12分）

解：（1）设 A，B，C 三家工厂各自独立生产的烟花“加特林”是正品分别为事件 A，B，C.

依题意 $\begin{cases}P(A)P(B)=\dfrac{3}{5},\\ P(B)(1-P(C))=\dfrac{2}{25},\\ P(C)(1-P(A))=\dfrac{9}{40},\end{cases}$ 则 $\begin{cases}\dfrac{P(A)}{1-P(C)}=\dfrac{15}{2}\Rightarrow P(C)=1-\dfrac{2}{15}P(A),\\ P(C)(1-P(A))=\dfrac{9}{40}.\end{cases}$

从而 $\dfrac{2}{15}(P(A))^2-\dfrac{17}{15}P(A)+\dfrac{31}{40}=\dfrac{2}{15}\left(P(A)-\dfrac{3}{4}\right)\left(P(A)-\dfrac{31}{4}\right)=0$，

解得：$P(A)=\dfrac{3}{4}$，$P(B)=\dfrac{4}{5}$，$P(C)=\dfrac{9}{10}$. …………（5分）（没有具体计算过程的酌情给分）

（2）随机变量 λ 的所有可能取值为0，1，2，3.

依题意：$P(\lambda=0)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{200}$，

$P(\lambda=1)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{9}{10}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{10}+\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{2}{25}$，

$P(\lambda=2)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{9}{10}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{9}{10}+\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{10}=\frac{3}{8}$，

$P(\lambda=3)=\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{9}{10}=\frac{27}{50}$．

随机变量λ的分布列如下：

λ	0	1	2	3
$P(\lambda)$	$\frac{1}{200}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{27}{50}$

λ的数学期望$E(\lambda)=\frac{2}{25}+\frac{3}{4}+\frac{81}{50}=\frac{49}{20}$. ……………………………………（11分）

数学期望是随机变量最基本的数学特征之一，它反映了随机变量λ平均取值的大小（要突出平均取值）. ……………………………………………………………（12分）

21.（本小题满分12分）

解：（1）椭圆C的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，

依题意$\begin{cases} e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2},\ c^2+b^2=a^2, \\ \frac{4}{3a^2}+\frac{2}{b^2}=1, \end{cases}$

解得：$a^2=4c^2$，$b^2=3c^2$，

代入$\frac{4}{3a^2}+\frac{2}{b^2}=1$得：$c^2=1$，$a^2=4c^2=4$，$b^2=3c^2=3$，

故椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………（4分）

（2）设圆心$P(x_0,\ 0)$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

显然直线l的斜率存在，设l：$y=k(x+1)$，

由$PA^2=PB^2=PQ^2$，则$(x_0-x_1)^2+y_1^{\ 2}=x_0^{\ 2}+\frac{7}{2}$，

又$y_1^{\ 2}=3-\frac{3}{4}x_1^{\ 2}$，代入得到：$\frac{1}{4}x_1^{\ 2}-2x_0x_1-\frac{1}{2}=0$，

同理：$\frac{1}{4}x_2^2-2x_0x_2-\frac{1}{2}=0$，

则 x_1，x_2 分别是 $\frac{1}{4}x^2-2x_0x-\frac{1}{2}=0$ 的两根，……………………………………（8分）

由韦达定理可得：$x_1x_2=-2$．

又联立 l：$y=k(x+1)$ 与 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，

得 $(4k^2+3)x^2+8k^2x+4k^2-12=0$，

故 $x_1x_2=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}=-2\Rightarrow k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$．

直线 l 的方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}$．……………………………………（10分）

此时 AB 的中点横坐标为 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-4k^2}{4k^2+3}=-\frac{2}{5}=4x_0\Rightarrow x_0=-\frac{1}{10}$，

此圆的圆心坐标为 $\left(-\frac{1}{10},\ 0\right)$．……………………………………………（12分）

（若仅仅联立方程得到韦达定理建议给2分）

22．（本小题满分12分）

（1）解：$f'(x)=e^x-2$，当 $x<\ln 2$ 时，$f'(x)=e^x-2<0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ \ln 2)$ 上单调递减；

当 $x>\ln 2$ 时，$f'(x)=e^x-2>0$，$f(x)$ 在 $(\ln 2,\ +\infty)$ 上单调递增；

故函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(\ln 2)=3-2\ln 2$，无极大值．…………………………（4分）

（2）证明：依题 $e^m-m+1=n-2\ln\frac{n}{2}$，从而 $n>0$．

先证：$1-\frac{n}{2}+\ln\frac{n}{2}\leqslant 0$，

事实上令 $t(x)=1-x+\ln x\,(x>0)$，$t'(x)=-1+\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x}$，

故当 $x<1$ 时，$t'(x)>0$，$t(x)$ 单调递增，$t(x)<t(1)=0$；

当 $x\geqslant 1$ 时，$t'(x)<0$，$t(x)$ 单调递减，$t(x)\leqslant t(1)=0$．

则 $1-\frac{n}{2}+\ln\frac{n}{2}\leqslant 0$．……………………………………………………（7分）

又依题意 $m-\mathrm{e}^m=1-n+2\ln\frac{n}{2}=-\frac{n}{2}+\ln\frac{n}{2}+\left(1-\frac{n}{2}+\ln\frac{n}{2}\right)\leqslant-\frac{n}{2}+\ln\frac{n}{2}=\ln\frac{n}{2}-\mathrm{e}^{\ln\frac{n}{2}}$，

…………………………………………………………（9分）

又令 $h(x)=x-\mathrm{e}^x$，$h'(x)=1-\mathrm{e}^x$，

故 $x\geqslant0$ 时，$h'(x)\leqslant0$，$h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，

$m-\mathrm{e}^m\leqslant-\frac{n}{2}+\ln\frac{n}{2}$，也即 $h(m)\leqslant h\left(\ln\frac{n}{2}\right)$.

当 $n\geqslant2$ 时，利用 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减知 $m\geqslant\ln\frac{n}{2}$；　……………………（11分）

当 $0<n<2$ 时，也有 $m\geqslant0>\ln\frac{n}{2}$.

从而 $m\geqslant\ln\frac{n}{2}\Rightarrow\frac{n}{2}\leqslant\mathrm{e}^m$，

综上：$n\leqslant2\mathrm{e}^m$.　…………………………………………………………（12分）