# 贵州省 2023 年普通高等学校招生适应性测试

# 文科数学参考答案及评分建议

一、选择题

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | D | B | C | B | C | D | A | C | C | A | A | B |

二、填空题

13．2　　14．$x-2y-5=0$　　15．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　16．$\frac{41\pi}{4}$

三、解答题

17．解：

（1）由 $a_1+a_5=17$，可得 $a_1(1+q^4)=17$．①

由 $a_4+a_8=136$，可得 $a_1q^3(1+q^4)=136$．② ……………………3 分

联立①②可得，$a_1=1$，$q=2$．

故 $a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$． ……………………6 分

（2）因为 $b_n=\log_2 a_n=\log_2 2^{n-1}=n-1$．

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=0+1+\cdots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}$， ……………………8 分

所以 $\frac{1}{T_2}+\frac{1}{T_3}+\cdots+\frac{1}{T_{n+1}}=2(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)})$

$=2(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$

$=2(1-\frac{1}{n+1})=\frac{2n}{n+1}$． ……………………12 分

18．解：

（1）得分不低于 90 的作品分别记为$M_1,M_2,N_1,N_2,N_3$，其中$M_1,M_2$是高一同学作品，

$N_1,N_2,N_3$是高二同学作品．

在得分不低于 90 的作品中任选 2 个，基本事件是$(M_1,M_2),(M_1,N_1),(M_1,N_2),$

$(M_1,N_3),(M_2,N_1),(M_2,N_2),(M_2,N_3),(N_1,N_2),(N_1,N_3),(N_2,N_3)$，基本事件总数

是 10．  ……………………………………3 分

记“作品制作者来自不同年级”为事件$A$，$A$包含的基本事件为$(M_1,N_1)$, $(M_1,N_2)$,

$(M_1,N_3),(M_2,N_1),(M_2,N_2),(M_2,N_3)$，$A$包含的基本事件个数为 6．

故所求事件概率：$P(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$．  ……………………………………6 分

（2）根据已知，作出下面 2×2 列联表：

| | 优良 | 非优良 | 合计 |
|---|---|---|---|
| 高一作品 | 7 | 13 | 20 |
| 高二作品 | 13 | 7 | 20 |
| 合计 | 20 | 20 | 40 |

所以，$K^2=\frac{40\times(49-169)^2}{20\times20\times20\times20}=3.6>2.706$，

故有 90%的把握认为作品“优良”与制作者所处年级有关．  …………………12 分

19．证明：

（1）由题意知：$D_1E\perp$平面$ABC,BC\subset$平面$ABC$，

所以$D_1E\perp BC$．  …………………………………… 2 分

又$BC\perp AB$，$AB\subset$平面$D_1AB$，$D_1E\subset$平面$D_1AB$，

且$AB\cap D_1E=E$，

所以$BC\perp$平面$D_1AB$．  ……………………………………………………5 分

又$AD_1\subset$平面$D_1AB$，

所以$BC\perp AD_1$，即$AD_1\perp BC$．  ………………………………………………6 分

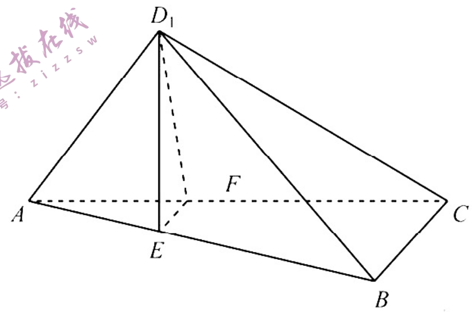
（2）过 $E$ 作 $EF // BC$ 交 $AC$ 于 $F$，连结 $D_1F$，截面△ $D_1EF$ 为所求．　　......................7 分

由（1）知 $AD_1 \perp BC$，又 $AD_1 \perp D_1C$，且 $BC \cap D_1C = C$，

所以 $AD_1 \perp$ 平面 $D_1BC$，

$D_1B \subset$ 平面 $D_1BC$，

所以 $AD_1 \perp D_1B$．　　.......................................................... 9 分




$D_1B = \sqrt{AB^2 - D_1A^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2}$，

则 $BE = \dfrac{BD_1^2}{AB} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

故 $AE = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，　$\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{1}{3}$．

因为 $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$，所以 $\dfrac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{1}{9}$，

从而得 $\dfrac{V_{D_1-AEF}}{V_{D_1-ABC}} = \dfrac{\frac{1}{3}S_{\triangle AEF} \cdot D_1E}{\frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot D_1E} = \dfrac{1}{9}$．

所以 $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{8}$．　　......................................12 分

20．解：

（1）设直线 $l$ 的方程为 $x = my + 4$，代入 $y^2 = 2px$ 并整理得 $y^2 - 2mpy - 8p = 0$．

$\Delta = (-2mp)^2 + 32p = 4m^2p^2 + 32p > 0$．

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则 $y_1y_2 = -8p, x_1x_2 = \dfrac{y_1^2}{2p} \cdot \dfrac{y_2^2}{2p} = \dfrac{64p^2}{4p^2} = 16$，　................3 分

由 $OA \perp OB$ 得 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$，即 $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$，

所以 $16 - 8p = 0$，即 $p = 2$，故抛物线的方程为 $y^2 = 4x$．　..........................6 分

（2）假设存在满足条件的点 $T(t,0)$，使 $k_{TA}+k_{TB}=k$．

由（1）知 $y_1+y_2=4m, y_1y_2=-16$，所以

$$k=k_{TA}+k_{TB}=\frac{y_1}{x_1-t}+\frac{y_2}{x_2-t}=\frac{y_1(my_2+4-t)+y_2(my_1+4-t)}{(my_1+4-t)(my_2+4-t)}$$

$$=\frac{2my_1y_2+(4-t)(y_1+y_2)}{m^2y_1y_2+m(4-t)(y_1+y_2)+(4-t)^2}$$

$$=\frac{-32m+4(4-t)m}{-16m^2+4m^2(4-t)+(4-t)^2}=\frac{-4m(t+4)}{-4m^2t+(4-t)^2}．$$ ……………………………………9 分

化简可得：$4tkm^2-4(t+4)m-k(4-t)^2=0$．

因为上式对 $m\in\mathbf{R}$ 恒成立，所以 $\begin{cases}tk=0,\\ t+4=0,\\ k(4-t)^2=0,\end{cases}$

解得 $t=-4, k=0$．

所以，在 $x$ 轴上存在点 $T(-4,0)$，使得直线 $TA$ 与直线 $TB$ 的斜率之和为 $0$．

……………………………………………………12 分

21．解：

（1）当 $a=\frac{1}{4}$ 时

$$F(x)=\ln x-\frac{1}{4}(x-1)^2+1=\ln x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\,(x>0)$$ ………………………………1 分

$$F'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=\frac{-x^2+x+2}{2x}=\frac{-(x-2)(x+1)}{2x}$$ ………………………………2 分

令 $F'(x)=0$，解得 $x=2$

当 $x\in(0,2)$ 时 $F'(x)>0$；当 $x\in(2,+\infty)$ 时 $F'(x)<0$．

所以 $F(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减， ……………………………4 分

所以 $F(x)_{\max}=F(2)=\ln 2+\frac{3}{4}$ ……………………………………………………6 分

（2）当 $a=-\frac{1}{4}$ 时，$g(x)=-\frac{1}{4}(x-1)^2-1=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}$

设曲线 $f(x)=\ln x(x>0)$ 与曲线 $g(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}$ 的公切线为 $y=kx+b$，

设切点分别为 $A(x_1,\ln x_1),B(x_2,-\frac{1}{4}x_2^2+\frac{1}{2}x_2-\frac{5}{4})$，

由 $f(x)=\ln x$ 与 $g(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}$ 得

$f'(x)=\frac{1}{x}$，$g'(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，

所以 $\begin{cases} k=\frac{1}{x_1}=-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}, & ① \\ \ln x_1=kx_1+b, & ② \\ -\frac{1}{4}x_2^2+\frac{1}{2}x_2-\frac{5}{4}=kx_2+b, & ③ \end{cases}$ ……………………………………………8 分

消去 $k$，$b$，$x_2$，得 $\ln x_1-\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_1}=0$， ……………………………………10 分

令 $t=\frac{1}{x_1}$，则 $\ln t+t^2-t=0$．

令 $\varphi(t)=\ln t+t^2-t(t>0)$，

$\varphi'(t)=\frac{1}{t}+2t-1\geqslant 2\sqrt{2}-1>0$，

故 $\varphi(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $\varphi(1)=0$，

所以 $\varphi(t)$ 只有一个零点 $t=1$，即方程 $\ln t+t^2-t=0$ 有唯一根 $t=1$，

故 $\ln x_1-\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_1}=0$ 有唯一解 $x_1=1$，把 $x_1=1$ 代入方程组①②得 $k=1,b=-1$．

所以所求的公切线方程为 $y=x-1$． ……………………………………12 分

（二）选考题

22．解：

（1）将曲线$C$的参数方程$\begin{cases} x=t \\ y=\dfrac{\lambda}{t} \end{cases}$消去$t$，得$C$的普通方程为$xy=\lambda$，

将$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，代入$xy=\lambda$

得$\rho^2\sin\theta\cos\theta=\lambda$，即$\rho^2\sin2\theta=2\lambda$，即为$C$的极坐标方程 ........................3 分

由直线$l$的方程$\rho\sin(\theta-\dfrac{\pi}{6})=2$化简得$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\rho\sin\theta-\dfrac{1}{2}\rho\cos\theta=2$，

化简得$x-\sqrt{3}y+4=0$，即为$l$的直角坐标方程. ............................................5 分

（2）将直线$\theta=\dfrac{\pi}{12}$代入$\rho^2\sin2\theta=2\lambda$，

得$\rho^2=4\lambda$，即$\rho_1=2\sqrt{\lambda}, \rho_2=-2\sqrt{\lambda}$． ..................................................7 分

故以$AB$为直径的圆圆心为$O$，半径$r=2\sqrt{\lambda}$．

圆心$O$到直线$l$的距离$d=\dfrac{4}{\sqrt{1+3}}=2$，由已知得$2\sqrt{\lambda}=2$，解得$\lambda=1$． ........10 分

23．解：

（1）因为$a>0, b>0$，$f(x)=|x+a|+|x-b|\geqslant|(x+a)-(x-b)|=a+b$， ....................2 分

由题意，有$a+b=2$，

于是$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{ab}=\dfrac{b+a+1}{ab}=\dfrac{3}{ab}\geqslant\dfrac{3}{(\frac{a+b}{2})^2}=3$，

当且仅当$a=b=1$时取等号，

即$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{ab}\geqslant3$． ..................................................5 分

（2）由柯西不等式得

$\dfrac{\sin^4 t}{a}+\dfrac{\cos^4 t}{b}=\dfrac{1}{2}(a+b)(\dfrac{\sin^4 t}{a}+\dfrac{\cos^4 t}{b})$

$\geqslant\dfrac{1}{2}(\sqrt{a\dfrac{\sin^4 t}{a}}+\sqrt{b\dfrac{\cos^4 t}{b}})^2=\dfrac{1}{2}$ ..................................................9 分

当且仅当$\dfrac{\dfrac{a}{\sin^4 t}}{a}=\dfrac{\dfrac{b}{\cos^4 t}}{b}$，即$\dfrac{a}{\sin^2 t}=\dfrac{b}{\cos^2 t}=\dfrac{a+b}{\sin^2 t+\cos^2 t}=2$，

即$\sin^2 t=\dfrac{a}{2}, \cos^2 t=\dfrac{b}{2}$时取等号.

故$\dfrac{\sin^4 t}{a}+\dfrac{\cos^4 t}{b}\geqslant\dfrac{1}{2}$． ..........................................10 分